

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САХАЛИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
для студентов по выполнению
практических работ**

по учебной дисциплине

ПД.01 МАТЕМАТИКА

**Укрупненная группа: 20.00.00 Техносферная безопасность и
природообустройство**

**Специальность: 20.02.04 Пожарная безопасность
(базовый уровень подготовки)**

Квалификация: техник

Форма обучения: очная

г. Южно-Сахалинск
2025г.

УТВЕРЖДАЮ

Зам. директора по НМР

 Е.Н. Ермоласва

« 19 » 05 2025 г.

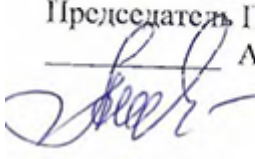
Составитель: Ким А.Х. преподаватель ПТК СахГУ

Одобрена на заседании ПЦК

Естественно-научных и математических дисциплин

Протокол № 9 от « 05 » 05 2025 г.

Председатель ПЦК

 А.А. Ицак

Содержание

1. Образовательный маршрут выполнения практических работ по ПД.01. Математика

Разделы, темы	Темы практических работ	Норма времени	Формы и методы контроля
Раздел 1 Алгебра и начала математического анализа			
Тема 1.1. Действительные числа		12	
№ 1. Вводный срез знаний.		2	Письменный ответ
№ 2. Целые и рациональные числа. Действительные числа. Действия над обыкновенными и десятичными дробями		2	Смешанный отчет (устно и письменно)
№ 3. Арифметический корень натуральной степени. Иррациональные числа		2	Письменный ответ
№ 4. Иррациональные числа. Приближенные числа. Абсолютная и относительная погрешности		2	- опорный конспект и практическое задание
№ 5. Степени и корни. Корни натуральной степени и их свойства		2	Письменный ответ
№ 6. Степень с рациональным показателем		2	Письменный ответ
Тема 1.2. Степенная функция		8	
№ 7. Преобразование выражений содержащих радикалы		2	Письменный ответ
№ 8. Равносильные уравнения и неравенства. Иррациональные уравнения		2	Письменный ответ
№ 9. Иррациональные уравнения		2	Письменный ответ, опорный конспект
№ 10. Контрольная работа № 2		2	Письменный ответ
Тема 1.3. Показательная функция		8	
№ 11. Показательные уравнения.		2	Коллоквиум
№ 12. Показательные уравнения		2	Письменный ответ
№ 13. Показательные неравенства		2	Письменный ответ
№ 14. Системы показательных уравнений и неравенств		2	Письменный ответ
Тема 1.4. Логарифмическая функция		10	
№ 15. Логарифмическая функция, ее свойства и график		2	устный ответ
№ 16. Логарифмические уравнения		2	Письменный ответ
№ 17. Логарифмические неравенства		2	Письменный ответ
№ 18. Решение логарифмических уравнений и неравенств		2	Письменный ответ
№ 19. Контрольная работа № 3		2	Письменный ответ
Тема 1.5. Тригонометрические формулы		8	
№ 20. Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$. Формулы сложения		2	Групповой письменный отчет
№ 21. Синус, косинус и тангенс двойного угла. Формулы приведения		2	Письменный ответ
№ 22. Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов		2	Письменный ответ
№ 23. Контрольная работа № 4		2	Письменный ответ
Тема 1.6. Тригонометрические функции		6	
№ 24. Свойства функции $y = \cos x$ и ее график. Свойства функции $y = \sin x$ и ее график		2	Письменный ответ
№ 25. Построение графиков тригонометрических функций $y = \sin x$: $y = \cos x$: $y = \operatorname{tg} x$. Преобразование графиков		2	Устный ответ

№ 26. Контрольная работа № 5	2	Письменный ответ
Тема 1.7. Тригонометрические уравнения	10	
№ 27. Уравнение $\cos x = a$. Уравнение $\operatorname{tg} x = a$. Решение уравнений	2	Письменный ответ
№ 28. Уравнение $\sin x = a$. Решение уравнений	2	Письменный ответ
№ 29. Решение тригонометрических уравнений	2	Письменный ответ
№ 30. Примеры решения тригонометрических уравнений.	2	Письменный ответ
№ 31. Контрольная работа № 6	2	Письменный ответ
Тема 1.8. Производная и ее геометрический смысл	14	
№ 32. Производная степенной функции	2	Письменный ответ, защита конспекта
№ 33. Правила дифференцирования	2	Письменный ответ
№ 34. Правила дифференцирования	2	Письменный ответ
№ 35. Правила дифференцирования	2	
№ 36. Производная сложной функции	2	Письменный ответ
№ 37. Производные некоторых элементарных функций.	2	Письменный ответ
№ 38. Контрольная работа № 7	2	Письменный ответ
Тема 1.9. Применение производной к исследованию функций	12	
№ 39. Экстремумы функции. Критические точки функции, максимумы и минимумы	2	Письменный ответ
№ 40. Исследование функции с помощью производной	2	Письменный ответ
№ 41. Исследование функции с помощью производной	2	Опорный конспект, письменный ответ
№ 42. Применение производной к построению графиков функций	2	Письменный ответ
№ 43. Наибольшее и наименьшее значения функции.	2	Письменный ответ
№ 44. Повторение. Решение упражнений	2	Письменный ответ
Итого за 1 семестр	88	
Тема 1.10. Интеграл	14	
№ 45. Правила нахождения первообразных	2	Письменный ответ
№ 46. Правила нахождения первообразных	2	Письменный ответ
№ 47. Интеграл. Формула Ньютона-Лейбница	2	Письменный ответ
№ 48. Вычисление интегралов	2	Устный ответ, письменный ответ
№ 49. Площадь криволинейной трапеции	2	Письменный ответ
№ 50. Применение интеграла к решению практических задач	2	Письменный ответ
№ 51. Контрольная работа № 9	2	Письменный ответ
Раздел 2. Геометрия		
Тема 2.1. Параллельность прямых и плоскостей	14	
№ 52. Предмет стереометрии. Аксиомы стереометрии. Некоторые следствия из аксиом	2	Письменный ответ
№ 53. Параллельность прямых, прямой и плоскости	2	Письменный ответ
№ 54. Решение задач	2	
№ 55. Взаимное расположение прямых в пространстве	2	Письменный ответ
№ 56. Угол между двумя прямыми	2	Письменный ответ
№ 57. Решение задач	2	Письменный ответ
№ 58. Параллельность плоскостей.	2	Письменный ответ
Тема 2.2. Перпендикулярность прямых и плоскостей	10	
№ 59. Перпендикулярность прямой и плоскости	2	Письменный ответ
№ 60. Перпендикулярность прямой и плоскости		
№ 61. Перпендикуляр и наклонные. Решение задач	2	Письменный ответ

№ 62. Перпендикуляр и наклонные. Решение задач	2	Письменный ответ
№ 63. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный угол	2	Письменный ответ
№ 64. Перпендикулярность плоскостей. Решение задач	2	Письменный ответ
Тема 2.3. Многогранники	10	
№ 65. Параллелепипед	2	Письменный ответ
№ 66. Пирамида.	2	Письменный ответ
№ 67. Усеченная пирамида	2	Письменный ответ
№ 68. Правильные многогранники	2	Письменный ответ, изготовление модели
№ 69. Контрольная работа №10	2	Письменный ответ
Тема 2.4. Векторы в пространстве	10	
№ 70. Понятие вектора в пространстве.	2	Устный ответ
№ 71. Сложение и вычитание векторов	2	Письменный ответ
№ 72. Умножение вектора на число	2	Устный ответ, письменный ответ
№ 73. . Скалярное произведение векторов	2	Письменный ответ
№ 74. Решение задач	2	Письменный ответ
Тема 2.5. Метод координат в пространстве	10	
№ 75. Декартовы координаты и векторы в пространстве	2	Письменный ответ
№ 76. Координаты середины отрезка	2	Письменный ответ
№ 77. Расстояние между точками	2	Письменный ответ
№ 78. Преобразование симметрии в пространстве	2	Письменный ответ
№ 79. Решение задач	2	Письменный ответ
Тема 2.6. Цилиндр, конус и шар	8	
№ 80 Конус.	2	Письменный ответ
№ 81. Решение задач	2	Письменный ответ
№ 82. Шар и сфера	2	Устный ответ , письменный ответ
№ 83. Решение задач	2	Письменный ответ
Тема 2.7. Объемы тел	12	
№ 84. Объем прямоугольного параллелепипеда. Объем прямой и наклонной призмы	2	Письменный ответ
№ 85. Объем пирамиды, усеченной пирамиды	2	Письменный ответ
№ 86. Объем цилиндра и конуса	2	Письменный ответ
№ 87. Объем шара и площадь сферы	2	Письменный ответ
№ 88. Решение задач	2	Письменный ответ
№ 89. Контрольная работа № 11	2	Письменный ответ
Раздел 3. Элементы комбинаторики	2	
№ 90. Задачи на подсчет числа размещений, перестановок, сочетаний	2	Письменный ответ
Раздел 4.Элементы теории вероятностей и математической статистики	6	
№ 91. Событие, вероятность события, сложение и умножение вероятностей	2	Письменный ответ
№ 92. Представление данных (таблицы, диаграммы, графики)	2	Письменный ответ
№ 93. Повторение. Решение задач	2	Письменный ответ
№ 94. Решение задач		
Итого за 1 семестр	88	
Итого за 2 семестр	100	
Всего	188	

2. Содержание практических занятий

Раздел 1. Алгебра и начала математического анализа

Тема 1.1. Действительные числа

Практическое занятие № 1. Вводный срез знаний

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Выполнить задания по вариантам:

I вариант

1. Упростить выражение:

$$\frac{4a^2}{a^2 - 4} \cdot \frac{a + 2}{2a}$$

2. Решить неравенство:

$$11x - (3x + 4) > 9x - 7.$$

3. Решить уравнение:

$$\frac{2}{x-3} = \frac{7}{x+1}.$$

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + 2y = 33 \end{cases}$$

5. а) Постройте график функции

$$y = 2x - 3$$

б) При каком значении x значение y равно -5

6. Решите неравенство:

$$2x^2 - 9x + 4 < 0.$$

7. Найдите значение выражения

$$\frac{a^4}{4} \text{ при } a = 3\sqrt{2}$$

8. Разложите на множители:

$$2x^2 - 20xy + 50y^2 - 2$$

9. Решить уравнение:

$$\frac{1}{x+6} + \frac{7}{x-3} = \frac{5}{x-6}$$

10. Решить графическую систему уравнений:

$$\begin{cases} xy + 3 = 0 \\ y = x^2 + 2 \end{cases}$$

II вариант

1. Упростить выражение:

$$\frac{x+1}{3x} : \frac{x^2-1}{6x^2}$$

2. Решить неравенство:

$$3 + 10x < 5x - (1 - x).$$

3. Решить уравнение:

$$\frac{6}{x+5} = \frac{4}{3-x}.$$

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y - x = 2 \\ y^2 + 4x = 13 \end{cases}$$

5. а) Постройте график функции $y = -2x + 3$

б) При каком значении x значение y равно -3 .

6. Решите неравенство:

$$3x^2 - 4x + 1 < 0.$$

7. Найдите значение выражения

$$\frac{y^4}{9} \text{ при } y = 2\sqrt{3}.$$

8. Разложите на множители:

$$3a^2 + 12b^2 + 12ab - 12$$

9. Решить уравнение:

$$\frac{1}{x-6} + \frac{4}{x+6} = \frac{3}{x-4}$$

10. Решить графическую систему уравнений:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ xy - 8 = 0 \end{cases}$$

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 2. Целые и рациональные числа. Действительные числа.

Действия над обыкновенными и десятичными дробями

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задания:

1. Вычислить:

$$1) 4\frac{1}{5} + 2\frac{1}{2} = 6\frac{7}{10}, 2) 15 - 5\frac{7}{11} = 9\frac{4}{11}, 3) 16,2 + 3\frac{4}{5} - 25,56 = -5,56,$$

2. Решить упражнения:

1) Записать в виде десятичной дроби:

$$1) \frac{1}{9} = 0,(1) \quad ; 2) \frac{4}{9} = 0,(4) \quad ; 3) \frac{13}{50} = 0,25 \quad ; 4) \frac{7}{30} = 0,2(3) \quad ; 5) \frac{23}{15} = 1,5(3).$$

3. Выполнить действия и записать результат в виде десятичной дроби:

$$1) \frac{2}{11} + \frac{1}{9} = \frac{29}{99} = 0,(2) \quad , 2) \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} = 0,8(3)$$

4. Представить в виде обыкновенной дроби:

$$1) 1,(47); 2) 0,2(3); 3) 0,2(18)$$

5. Представить обыкновенную дробь в виде десятичной периодической дроби:

$$\frac{3}{13}; \frac{12}{55}; \frac{1}{7}; \frac{3}{47}; \frac{1}{6}; \frac{7}{3}; \frac{1}{9}; \frac{10}{11}; \frac{3}{5}; \frac{5}{6}; \frac{7}{4}; \frac{8}{5}.$$

6. Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную периодическую десятичную дробь: 1. $0,(6)$; 2. $4,1(25)$; 3. $0,1(5)$; 4. $0,11(2)$; 5. $0,(7)$; 6. $2,3(81)$; 7. $2,(40)$; 8. $1,3(25)$; 9. $1,(13)$; 10. $0,1(15)$; 11. $11,(1)$; 12. $0,121(5)$;

7. Вычислить:

$$203,4 : 9 - (5,39 - 7,39)$$

$$\frac{3}{14} - \frac{7}{9} - \frac{1}{3}$$

Форма отчёта: смешанный отчет (устно и письменно)

Практическое занятие № 3. Арифметический корень натуральной степени.

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание:

1. Вычислить: а) $\sqrt[5]{3^{10} \cdot 2^{15}}$; б) $\sqrt[4]{3^{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8}$
2. Упростить выражение: а) $\left(\sqrt[3]{y^2}\right)^3$; б) $\left(\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{b^3}\right)^{12}$;
3. Вычислить: а) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt[6]{27^2} - \sqrt[3]{64}$; б) $\sqrt[3]{11 - \sqrt{57}} \cdot \sqrt[3]{11 + \sqrt{57}}$;
в) $\left(\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right) : \sqrt[3]{2}$
4. Упростить выражение: $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{18}}} + \left(\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}\right)^3$
5. Упростить выражение: а) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ б) $\frac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} - \frac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 4. Иррациональные числа. Приближенные числа. Абсолютная и относительная погрешности. Корни натуральной степени и их свойства

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание 1. 1. Изучить понятия иррациональные числа, понятие абсолютной и относительной погрешностей;

2. Составить опорный конспект, ответив на вопросы:

- Какое число называется приближённым?
- Что называется абсолютной погрешностью?
- Что называется относительной погрешностью?
- Как выполняются действия с приближёнными числами? Привести примеры
- Что называют корнем n-ой степени из числа?
- Как называют действие нахождения корня из числа?
- Запишите основные свойства корня. Приведите примеры для каждого свойства.

Задание 2. Практическая часть:

1. Дадаян А.А. Сборник задач по математике. с. 41, № 2. 121 (а, б, в, г, д, е);
2. Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа. с. 201 –206, № 383, № 392, № 402

Форма отчета: проверка опорного конспекта и практического задания

Практическая работа № 5. Степени и корни. Корни натуральной степени и их свойства

Практическая работа № 6. Степень с рациональным показателем

Количество часов - 4 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание 1. Ответьте на вопросы:

1. Сформулируйте свойства возведения в степень с натуральным показателем.

2. Сформулируйте свойства извлечения корня из числа.

3. Как определяется степень числа с рациональным показателем? Чему равно $a^{\frac{p}{q}}$

4. Дайте определение степени числа a с целым отрицательным показателем.

5. Как выполняется операция извлечения корня из корня?

Задание 2. Выполните тождественные преобразования:

1 вариант	2 вариант	3 вариант	4 вариант
1. Найдите значение выражения:			
$\left(5^{-3} \cdot \frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{1}{16} \cdot 81^{-1}\right)^{-\frac{1}{4}}$	$\left(\frac{1}{36} \cdot 0,04\right)^{-\frac{1}{2}}$	$(27 \cdot 64)^{\frac{1}{3}}$
2. Упростите выражение:			
$\frac{x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{3}{5}}}$	$\frac{\left(c^{\frac{-2}{3}}\right)^{-4}}{c^{\frac{1}{6}} \cdot c^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{y^{\frac{6}{7}} \cdot \left(y^{\frac{-1}{2}}\right)^2}{\left(y^{\frac{4}{7}}\right)^{-2}}$	$\left(\frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{2}{5}}}\right)^{20}$
3. Освободитесь от иррациональности в знаменателе:			
$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$	$\frac{7}{\sqrt{2} + 1}$	$\frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$	$\frac{9}{\sqrt{7} - 1}$
4. Выполните действия:			
$(\sqrt[3]{m} - 2\sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{m} + 2\sqrt[3]{n})$	$(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5})$	$(\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2})(2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})$	$(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b})$
• 5. Извлеките корень из корня			
$\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2m^4n^8}}$	$\sqrt{y^5\sqrt[3]{9x^4y^2}}$	$\sqrt[5]{4\sqrt[3]{k^2l^5}}$	$\sqrt[7]{q^5\sqrt[3]{2p^3q}}$
• 6. Вычислите:			
$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 25^{\frac{1}{2}} - 81^{\frac{1}{2}} \cdot 125^{\frac{-1}{3}}$	$\left(\frac{1}{7}\right)^{-2} \cdot 49^{\frac{1}{2}} + 2^{-1} \cdot (2)^{-2}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^{-2} \cdot 216^{\frac{1}{3}} - 5^{-1} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} - 2^{-1} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{-1}{3}}$
• 7. Найдите значения выражения:			
$\frac{x+1}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{x-1}{1-\sqrt{1+x}}$, при $x = \frac{a}{9}$	$\frac{2a^{0,5}}{a-4} - \frac{1}{a^{0,5}-2}$, при $a = 16$		

Тема 1.2. Степенная функция

Практическое занятие № 7. Преобразование выражений содержащих радикалы

Практическое занятие № 8 Равносильные уравнения и неравенства.

Иррациональные уравнения

Количество часов - 4 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание 1.1. Ответьте на вопросы:

1. Сформулируйте свойства возведения в степень с натуральным показателем.

2. Сформулируйте свойства извлечения корня из числа.

3. Как определяется степень числа с рациональным показателем? Чему равно $a^{\frac{p}{q}}$

4. Дайте определение степени числа a с целым отрицательным показателем.

5. Как выполняется операция извлечения корня из корня?

Задание 2.

1. Вычислить: а) $27^{\frac{2}{3}}$; б) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}}$; в) $150^{\frac{3}{2}} : 6^{\frac{3}{2}}$; г) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + 810000^{0,25} - \left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$

2. Представить в виде степени с рациональным показателем:

а) $a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}$; б) $a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}$;

3. Вычислить: а) $3^{1+2\sqrt{2}} : 9^{\sqrt{2}}$; б) $(25^{1+\sqrt{2}} - 5^{2\sqrt{2}}) \cdot 5^{-1-2\sqrt{2}}$;

4. Сравнить числа:

а) $2^{\sqrt{3}}$ или $2^{1,7}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,7}$; в) $0,88^{\frac{1}{6}}$ или $\left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{1}{6}}$ г) $\left(\frac{1}{12}\right)^{-\frac{1}{4}}$ или $(0,41)^{-\frac{1}{4}}$

5. Упростить выражение: а) $\frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} \right)}$; б) $\frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{4}{9}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{5}{4}}} - \frac{b^{-\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}}$

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 9. Иррациональные уравнения

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание 1. Решить уравнения:

1. $\sqrt{-4x - 1 + x^2} = 2$

2. $\sqrt{4+x} \cdot \sqrt{5-x} = 2\sqrt{2}$

3. $\sqrt{3x+3+x^2} = 2x+1$

4. $\sqrt{8+x} \cdot \sqrt{8-x} = x$

5. $\sqrt{-3x-5+2x^2} = x-1$

6. $\sqrt{7-\sqrt{x+1}} = 2$

Задание 2. Опорный конспект по теме занятия

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 10. Контрольная работа № 2

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание. Решите уравнения:

1. $\sqrt{1+3x} = 1$

2. $x - \sqrt{x-1} = 3$

3. $\sqrt{x^2-9} = 6-2x$

4. $\sqrt{16x^2-9x+54} + 5x = 0$

5. Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $\sqrt[3]{x-3} = -2$.

1) $(-6; -3)$; 2) $(-3; 0)$; 3) $(0; 3)$; 4) $(3; 6)$

6. Найдите среднее арифметическое корней уравнения $\sqrt[3]{x^2+4x+6} = 3$.

1) -3 ; 2) -2 ; 3) 1 ; 4) 2 .

Форма отчёта: Письменный ответ

Тема 1.3. Показательная функция

Практическое занятие № 11-12. Показательные уравнения.

Практическое занятие № 13. Показательные неравенства

Количество часов - 6 часов

Методические рекомендации по выполнению

Задание:

I вариант	II вариант
1. Контрольные вопросы	
а) указать свойства показательной функции;	

б) привести примеры возрастающей и убывающей показательной функции (схематично)			
2. Решить уравнения:			
1) $8^x = 64$;	2) $2^{x+1} = 32$;	1) $0,5^x = 0,125$;	2) $3^{x-2} = 81$;
3) $7^x = \frac{1}{343}$;	4) $\left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{25}{16}$;	3) $\left(\frac{1}{6}\right)^x = 36$;	4) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{16}{81}$;
5) $3^{-1-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+3}$;	6) $3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$	5) $\left(\frac{1}{6}\right)^{4x-7} = 6^{x-3}$;	6) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$
3. Решить неравенства:			
1) $4^{5x-1} > 16^{3x+2}$;	2) $11^{2x^2+3x} \leq 121$;	1) $0,5^{4x+3} \geq 0,5^{6x-1}$;	2) $7^{x^2-5x} < \left(\frac{1}{7}\right)^6$;
3) $0,9^{x^2-4x} < \left(\frac{10}{9}\right)^3$		3) $14^{x^2+x} \leq 196$	

Форма отчёта: коллоквиум

Практическое занятие № 14. Системы показательных уравнений и неравенств

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание: Решите уравнение:

- а) $0,3^{3x-2} = 1$
 б) $2^{3x+2} - 2^{3x-2} = 30$
 в) $64^x - 8^x - 56 = 0$

2. Решите неравенство:

- а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-6} \leq 32$
 б) $\frac{1}{36} < 6^{x+1} < 1$

3. Решите систему уравнений:

- а). $\begin{cases} x - y = 1, \\ 4^{2x-3y} = 1 \end{cases}$ б). $\begin{cases} 3^{x+2y} = 81 \\ 0,1^x \cdot 10^{3y} = 10 \end{cases}$ в). $\begin{cases} 27^x = 9^y \\ 81^x = 3^{y+1} \end{cases}$ д). $\begin{cases} 4^{x+y} = 16 \\ 4^{x+2y-1} = 1 \end{cases}$

Форма отчёта: письменный ответ

Тема 1.4. Логарифмическая функция

Практическое занятие № 15. Логарифмическая функция, ее свойства и график

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

І вариант	ІІ вариант
1. Контрольные вопросы	
а) дать определение возрастающей и убывающей функций? б) привести примеры возрастающей логарифмической функции; в) привести примеры убывающей логарифмической функции; г) привести примеры возрастающей показательной функции; д) привести примеры убывающей показательной функции.	
2. В одной системе координат построить графики (цветными карандашами) следующих функций:	
$y = \log_3 x$; $y = 3^x$	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
Построить на чертежах прямую $x=y$ (биссектрису 1 и 3 координатных углов) и сделать вывод о симметрии построенных графиков.	

3. Решить графически уравнение:		
$\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 = x^3 + 2$		$\log_2 x = x + 1$
4. Построить график функции и описать его свойства (единичный отрезок – 2 клетки):		
1) $y = \log_4 x + 1$; 2) $y = 3^x - 4$;		3) $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x) + 2$; 4) $y = 2^x + 1$.
Примечание: все вспомогательные графики строятся пунктиром и различными цветами		
5. Выполнить индивидуальное задание. Решить графически уравнение:		
1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 = x^3$;	11) $-x + 1 = 2^x$;	21) $\log_2 x = -x^3 + 1$;
2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x + 1 = x^2 - 2$;	12) $-x^3 = 3^x - 1$;	22) $2^x = \sqrt{x + 1}$;
3) $-x + 1 = \log_2 x$;	13) $-x^2 + 1 = \log_2 x$;	23) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^x$;
4) $4\log_2 x = x + 1$;	14) $\sqrt{x} - 1 = 2^x$;	24) $-x^2 + 3 = 2^x$;
5) $2^x - 2 = \log_2 x$;	15) $x^2 - 1 = \log_{\frac{1}{2}} x$;	25) $2^{-x} = x + 1$;
6) $\log_2 x = 2 - x$;	16) $-x + 4 = \log_2 x$;	26) $\log_{\frac{1}{2}} x = x$;
7) $-x^3 + 1 = 2^x$;	17) $4^x = \log_4 x$;	27) $2^x = \log_2 x + 2$;
8) $\log_2(x + 1) = -x$;	18) $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 = -\frac{1}{x}$;	28) $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_2 x$;
9) $2^x - 1 = x$;	19) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^x$;	29) $\log_2 x = \frac{4}{x}$;
10) $3^x + 1 = \log_3 x - 1$;	20) $-x + 6 = \log_2 x$;	30) $\frac{2}{x} = 2^x$.

Форма отчёта: индивидуальный устный ответ

Практическое занятие № 16. Логарифмические уравнения

Практическое занятие № 17. Логарифмические неравенства

Количество часов - 4 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание	
I вариант	II вариант
1. Контрольные вопросы	
а) дать определение логарифма; б) сформулировать основные свойства логарифмов; в) найти x , если $\log_3 x = 2$; $\log_2 8 = x$; $\log_4 x = 1$; $\log_5 25 = x$.	
2. Решить уравнение:	
1) $\log_2(4-x) = 2$; 2) $\log_{\frac{1}{4}}(x-3) = -1$; 3) $\log_{0,3}(-x^2 + 5x + 7) = \log_{0,3}(10x - 7)$; 4) $\log_3 x = \log_3 30 - \log_3 10$;	1) $\log_4(x+1) = 1$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-5) = -1$; 3) $\log_{0,2}(-x^2 + 4x + 5) = \log_{0,2}(-x - 31)$; 4) $\log_4(x^2 + 1) = \log_4 13 + \log_4 2$;

5) $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 = 0$;	5) $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 = 0$;
6) $\log_2^2 x - 7\log_2 x + 12 = 0$;	6) $\log_2^2 x - 6\log_2 x + 8 = 0$.

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 17-18. Решение логарифмических уравнений и неравенств.

Практическое занятие № 19.. Контрольная работа № 3

Количество часов – 6 часов

Методические рекомендации по выполнению

Задание

I вариант	II вариант
1. Контрольные вопросы	
а) при каких условиях логарифмическая функция возрастает, убывает? б) что является областью определения логарифмической функции? в) привести примеры возрастающих и убывающих логарифмических функций(схематически)	
2. Решить уравнения и неравенства	
1) $\log_2 x \geq 4$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x \leq -3$; 3). $\log_3^2 x - 2 \log_3 x = 3$; 4) $\log_5 x > \log_5 (3x - 4)$; 5) $\log_3 (8 - 6x) \leq \log_3 2x$; 6) $\log_2 (5x - 9) \leq \log_2 (3x + 1)$; 7). $\log_2^2 x > 4\log_2 x - 3$; 8). $\log_2 (x^2 - 3x - 10) = 3$;	1) $\log_2 x \leq 3$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x \leq -3$; 3). $\log_3^2 x - 2 \log_3 x = 3$; 4) $\log_{0,6} (2x - 1) < \log_{0,6} x$; 5) $\log_{\frac{1}{3}} (5x - 9) \geq \log_{\frac{1}{3}} 4x$; 6) $\log_{2,5} (6 - x) \leq \log_{2,5} (4 - 3x)$; 7). $\log_{\frac{1}{2}}^2 x + 3\log_{\frac{1}{2}} x < -2$; 8). $\log_{\frac{1}{7}} (x^2 + x - 5) = -1$

Форма отчёта: письменный ответ

Тема 1.5. Тригонометрические формулы

Практическое занятие № 20. Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$. Формулы сложения

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

1 Вариант

1. Выразите в радианной мере величины углов 64° ; 160° .

2. Выразите в градусной мере величины углов $\frac{3\pi}{5}$, $1\frac{3}{4}\pi$.

3. Укажите знак числа: а) $\sin \frac{4\pi}{5} \lg \frac{\pi}{7}$; б) $\sin 3 \cdot \cos 4$.

4. Дано: $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Найдите $\cos \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$.

2 Вариант

1. Выразите в радианной мере величины углов 56° ; 170° .

2. Выразите в градусной мере величины углов $\frac{5\pi}{6}$, $2\frac{1}{6}\pi$.

3. Укажите знак числа: а) $\cos \frac{3\pi}{5} \lg \frac{\pi}{9}$; б) $\sin 4 \cdot \cos 5$.

4. Дано: $\cos \alpha = -\frac{24}{25}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Найдите $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$.

3 Вариант

1. Выразите в радианной мере величины углов 72° ; 140° .

2. Выразите в градусной мере величины углов $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{23}{8}\pi$.

3. Укажите знак числа: а) $\frac{\cos 200^\circ \cdot \operatorname{tg} 300^\circ}{\sin 400^\circ}$; б) $\cos 2 \cdot \operatorname{tg} 4$.

4. Найдите $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что $\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ и α не лежит во второй

четверти

Форма отчёта: групповой письменный отчет

Практическое занятие № 21-22. Синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$. Формулы приведения. Сумма и разность синусов. Сумма и разность косинусов

Количество часов - 4 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

1 Вариант

1. Упростите выражение: $\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \operatorname{ctg}^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$.

2. Упростите выражение: $\operatorname{ctg}^2 \alpha (1 - \cos 2\alpha)^2 - \cos^2 2\alpha$.

3. Вычислите $\frac{\cos 68^\circ \cos 8^\circ - \cos 82^\circ \cos 22^\circ}{\cos 53^\circ \cos 23^\circ - \cos 67^\circ \cos 37^\circ}$.

4. Вычислите $\sin 20^\circ \cos 50^\circ \sin 60^\circ \cos 10^\circ$.

5. Преобразовать в произведение $\frac{1}{\sqrt{3}} \sin 4\alpha + 1 - 2 \cos^2 2\alpha$.

Дополнительное задание:

Дано: $\sin x - \cos x = n$. Найдите $\sin 2x$ и наименьшее значение n .

2 Вариант

1. Вычислите $\sin 105^\circ \cdot \cos 15^\circ + \sin 15^\circ \cdot \sin 165^\circ + \operatorname{tg} 225^\circ$.

2. Вычислите $\frac{1 - \sin^2 15^\circ}{2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1}$.

3. Вычислите $\frac{\cos 70^\circ \cos 10^\circ + \cos 80^\circ \cos 20^\circ}{\cos 69^\circ \cos 9^\circ + \cos 81^\circ \cos 21^\circ}$.

4. Вычислите $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$.

5. Преобразовать в произведение $6 \sin^2 2\alpha - 1 - \cos 4\alpha$.

Дополнительное задание:

Дано: $\sin x + \cos x = m$. Найдите $\sin 2x$ и наибольшее значение m .

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 23. Контрольная работа № 4

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

1 Вариант

1. Упростить выражение:
 $(\sin 160^\circ + \sin 40^\circ)(\sin 140^\circ + \sin 20^\circ) + (\sin 50^\circ - \sin 70^\circ)(\sin 130^\circ - \sin 110^\circ).$
2. Упростите выражение: $\operatorname{ctg}^2 \alpha (1 - \cos 2\alpha)^2 + \cos^2 2\alpha.$
3. Докажите тождество: $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) \left(1 + \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha \right) \right) = \operatorname{tg}(2\pi - \alpha) - \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right).$

2 Вариант

1. Упростить выражение:
 $(\cos 70^\circ + \cos 50^\circ)(\cos 310^\circ + \cos 290^\circ) + (\cos 40^\circ + \cos 160^\circ)(\cos 320^\circ - \cos 380^\circ).$
2. Упростите выражение: $\cos^2 \alpha (1 + \cos 2\alpha)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha.$
3. Докажите тождество: $\frac{\sin(\alpha + \pi)}{\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)} + \frac{\cos(3\pi - \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 1} = \frac{1}{\cos \alpha}.$

Форма отчёта: письменный ответ

Тема 1.6. Тригонометрические функции

Практическое занятие № 24. Свойства функции $y = \cos x$ и ее график. Свойства функции $y = \sin x$ и ее график

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

- 1) свойства тригонометрических функций, $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$
- 3) что такое нули функции?
- 4). Построить графики функций:
1. $y = \cos x - 1$; 2. $y = |2 \cos x|$; 3. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; 4. $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

Форма отчёта: устный ответ

Практическое занятие №25. Построение графиков тригонометрических функций $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$. Преобразование графиков

Практическое занятие № 26. Контрольная работа

Количество часов - 4 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание 1. Выполнить построение графиков $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$. Провести исследование тригонометрических функций.

Задание 2. Выполнить и описать преобразование графиков

1. $y = \sin x$; 2. $y = \frac{1}{2} \sin x$; 3. $y = \sin x + 1$; 4. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 5. $y = \left|\frac{1}{2} \sin x\right|$;
6. $y = \operatorname{ctg} x$; 7. $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

Форма отчёта: письменный ответ

Тема 1.7. Тригонометрические уравнения

Практическое занятие № 27. Уравнение $\cos x = a$. Уравнение $\operatorname{tg} x = a$. Решение уравнений

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Уравнение	Общее решение	Частные случаи		
		$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$

$\sin x = a$, $ a \leq 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$	$x = -\frac{\pi}{2} +$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} +$
$\cos x =$, $ a \leq 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n$	$x = \pi + 2$	$x = \frac{\pi}{2}$	$x = 2\pi n$
$\operatorname{tg} x = a$, $a \in (-\infty; \infty)$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$
$\operatorname{ctg} x = a$, $a \in (-\infty; \infty)$	$x = \operatorname{arccotg} a + \pi n$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} +$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$

Задание

1. Повторить формулы решения простейших тригонометрических уравнений.
2. Решение простейших тригонометрических уравнений.
3. Решить уравнения:

a). $\cos x - \frac{1}{2} = 0$; b). $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$; c). $2 \cos x - 1 = 0$; d). $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
e). $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$; f). $\operatorname{tg} 2x = 1$

Форма отчёта: письменный ответ**Практическое занятие № 28.** Уравнение $\sin x = a$. Решение уравнений**Количество часов** - 2 часа**Методические рекомендации по выполнению****Задание**

1. Повторить формулы решения простейших тригонометрических уравнений.
2. Решение простейших тригонометрических уравнений.
3. Решить уравнения:

1). $\sin x - \frac{1}{2} = 0$; 2). $\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; 3). $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$; 4). $2 \sin x - 1 = 0$; 5).
 $\operatorname{ctg} 3x = 1$;

6). $\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$

Форма отчёта: письменный ответ**Практическое занятие № 29.** Решение тригонометрических уравнений**Количество часов** - 2 часа**Методические рекомендации по выполнению****Задание**

I вариант	II вариант
1. Решить уравнение, сделав подстановку:	
1) $2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$; 2) $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0$; 3) $\cos 2x + 5 \sin x - 3 = 0$; 4) $2 \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x = 5$;	5) $2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 = 0$; 6) $4 + 5 \cos x - 2 \sin^2 x = 0$; 7) $\cos 2x + 5 \cos x = 0$; 8) $3 \operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x = 8$.
2. Решить уравнение методом разложения на множители:	

1) $5 \sin x + 3 \sin 2x = 0$; 2) $\sin 7x - \sin x = 0$;	3) $7 \cos x - 4 \sin 2x = 0$; 4) $\cos 5x + \cos x = 0$.
3. Решите уравнение, упростив левую часть:	
1) $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $2 \sin^2 x \cos 2x = 1$; 3) $\sin 3x \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos 3x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$;	4) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $\sin 3x \cdot \cos 3x = -\frac{1}{2}$; 6) $\sin 2x \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \cos 2x \cdot \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 0$.
4. Решите однородное уравнение:	
1) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$; 2) $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$; 3) $\sin x \cdot \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0$;	4) $\sin x - \cos x = 0$; 5) $3 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$; 6) $\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 0$.

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 30. Примеры решения тригонометрических уравнений.
Практическое занятие № 31. Контрольная работа № 6

Количество часов - 4 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

Вариант 1

Решить уравнения:

- $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.
- $\sin x + \cos x = 1$.
- $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = 1$.
- $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$.
- $3 \sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x =$
- $\cos 2x = \cos 4x$
- $\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = 1$
- $\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x = 3$

Вариант 2

- $6 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$
- $\sin x - \cos x = 1$.
- $\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 1$.
- $\cos 2x + \sin x \cdot \cos x = 1$.
- $3 \cos^2 x - 5 \sin^2 x = \sin 2x$
- $\sin 3x = \sin 5x$
- $\sqrt{3} \cos 3x - \sin 3x = 1$
- $\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x + 1 = 0$;

Форма отчёта: письменный ответ

Тема 1.8. Производная и ее геометрический смысл

Практическое занятие № 32. Производная степенной функции

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

I вариант	II вариант
1. Контрольные вопросы	
а) дать определение производной; б) записать формулы дифференцирования; в) чему равна производная постоянной?	
2. Вычислить производную:	
1. $y = x^2 - 7x$; 2. $y = x^5 + 2x$; 3. $y = 7x^2 + 3x$; 4. $y = 15x + \sqrt{x}$; 5. $y = 10x^2 + \frac{1}{x}$; 6. $y = \sin x + 3$;	1. $y = x^4 - 3x$; 2. $y = x^3 - x^5$; 3. $y = 4x^4 - 6x$; 4. $y = 16x - 2\sqrt{x}$; 5. $y = 2x^3 - \frac{1}{x}$; 6. $y = 2 \cos x - 4x^2$;

7. $y = -2x^2 - \frac{1}{x}$; 8. $y = -2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$	7. $y = -4x^4 - \frac{3}{x}$; 8. $y = -3\sqrt{x} + \frac{1}{14}x^7$
--	--

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 33-35. Правила дифференцирования

Количество часов - 6 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

1. Повторить формулы дифференцирования.
2. Используя таблицу производных, правила дифференцирования суммы, произведения и частного элементарных функций, найти производные функций.
3. Используя таблицу производных, правила дифференцирования суммы, произведения и частного элементарных функций, найти производные следующих функций:

1 вариант	2 вариант	3 вариант
1 $y = 12x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - 7$	1 $y = 2e^x + 3x^3$	$f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{16}{3}x^3$
2 $y = 2x^3 - 5x^2 + 4$	2 $y = 6x^2 + 2x^4 + 6$	2 $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cos x$
3 $y = e^x(\sin x + \cos x)$	3 $y = \sqrt[3]{x^2} \sin x \ln x$	3 $y = 4x^3 \sin x$
4 $y = (x^4 - 3)(x^2 + 2)$	4 $y = (x + 2)(x^2 + 2x^3 + 6)$	$y = (x^5 - x)e^x$ 4
5 $y = \frac{5}{(1-x^2)(1+x^4)}$	5 $y = \frac{1-x^3}{1-x^5}$	$y = \frac{5 \arctg x}{\arcsin x}$

4. Решить уравнение $y' = 0$.

1 $y = 2x^2 - x$	1 $y = x^2 - 5x$	1 $y = 2x - 5x^2$
2 $y = \frac{1}{3}x^3 - 1,5x^2 - 4x$	2 $y = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12$	2 $y = x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 5x$
3 $y = 4x - 3x^2$	3 $y = x^4 + 4x$	3 $y = x^4 - 12x^2$

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 36. Производная сложной функции

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

Найти производную сложной функции:

$y = (2x - 3)^6$	1 $y = (x^2 + 7x - 2)^3$	1 $y = \left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^4$
2 $y = \cos 3x$	2 $y = \operatorname{ctg} \frac{4-3x}{7}$	2 $y = \frac{\sin 3x}{2x+3}$

3	$y = x \cos 3x$	3	$y = x e^x$	$y^3 = x^2 \ln x$
4	$y = x \ln^2 x$		$y = e^{2x} \ln(5 - 3x)$	$y = \frac{(3x-2)^3}{1+x}$ 4
5	$y = \sin^3(2x + \frac{\pi}{6})$		$y = x(2x - 3)^7$	$y = (3x+1)^2(2x-3)^7$ 5

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 37. Производные некоторых элементарных функций.

Практическое занятие № 38. Контрольная работа № 7

Количество часов - 4 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание 1. Выучить и ответить устно таблицу производных. Уметь приводить примеры на каждое табличное значение.

Выполнить работу по вариантам:

Вариант № 1

1. Найти производную.

а) $Y = 2x^4 - 5x^3 + 6x - 7$;

б) $y = \frac{2}{x} - \frac{8}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt[3]{x^2}} + 2x + 8$;

в) $f(x) = (x^2 - 2)\sqrt{x^2 + 1}$; найдите $f'(\sqrt{3})$.

г) $f(x) = e^{2x} \cdot \ln x^2$ Найдите $f'(1)$;

д). $y = \frac{x^2 + 1}{3x}$;

е). $y = \sin(x^2 - 2x + 4)$

Вариант № 2

1. Найти производную.

а) $Y = 5x^8 - 6x^2 + 3x - 41$;

б) $y = \frac{2}{x^2} - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} + 3x + 1$;

в) $f(x) = (x^3 + 3)\sqrt{x^2 - 1}$; найдите $f'(2)$.

г) $f(x) = \sqrt{e^x} \cdot \ln x^2$ Найдите $f'(1)$;

л). $y = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$;

е). $y = \lg(2x)$

Форма отчёта: письменный ответ

Тема 1.9. Применение производной к исследованию функций

Практическое занятие № 39. Экстремумы функции. Критические точки функции, максимумы и минимумы

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

I вариант	II вариант
1. Контрольные вопросы	
а) что такое критические точки функции?	
б) что такое экстремумы функции?	
2. Определить род экстремума функции	
$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2$	$f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5$
3. Решить задачу:	
1. Сумма двух целых чисел равна 24. Найти эти числа, если их произведение принимает наибольшее значение.	1. Разность двух чисел равна 10. Найти эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение.
2. Площадь прямоугольника составляет 16 см ² . Каковы его размеры, если периметр принимает наименьшее значение.	2. Площадь прямоугольника составляет 64 см ² . Каковы должны быть его размеры, чтобы периметр прямоугольника был наименьший?

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 40-41. Исследование функции с помощью производной

Количество часов - 4 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание. Сделать опорный конспект по вопросам теории:

I вариант				II вариант			
1. Контрольные вопросы							
а) что такое интервалы монотонности?							
б) что такое max и min для функции?							
в) вспомнить алгоритм исследования функции на экстремумы.							
2. Записать общую схему исследования функции для построения графиков:							
1. Найти область определения;							
2. Определить свойства функции и точки пересечения с осями координат, если можно;							
3. Исследовать на монотонность и составить схему;							
4. Определить экстремумы и значение функции в них;							
5. Найти дополнительно несколько точек;							
6. Построить график функции.							
3. Используя данные о производной y' , приведенные в таблице, ответить на вопросы:							
а) промежутки возрастания;							
б) промежутки убывания;							
в) точки максимума;							
г) точки минимума.							
I вариант							
	$(-\infty; -5)$	5	$(-5; -2)$	2	$(-2; 8)$	8	$(8; +\infty)$
,	+		-		+	0	+
II вариант							
	$(-\infty; 2)$	2	$(2; 3)$	3	$(3; +\infty)$		
,	+	0	-	0		+	
4. Используя вышеизложенную схему, исследовать и построить график функции:							
1) $y = x^3 - 3x + 2$;							
2) $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 8$;							

Форма отчёта: опорный конспект, письменный ответ

Практическое занятие № 42. Применение производной к построению графиков функций

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание. I вариант

1. Найти промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции:

а) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2$;

б) $f(x) = 8x^3 + 7x^2 - 3$;

2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке:

а) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$, на $[0; 3]$;

б) $f(x) = \sin 2x - x$, на $[-\pi/2; \pi/2]$.

3. Число 63 представить в виде суммы трех слагаемых, два из которых пропорциональны числам 3 и 4, так, чтобы их произведение было наибольшим.

2 вариант

1. Найти промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции :

а) $f(x) = -x^3 + 3x$;

б) $f(x) = -4x^3 + 5x$;

2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке:

а) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, на $[-2; 2]$;

б) $f(x) = \cos 2x + 2x$, на $[-\pi; \pi]$.

3. Число 84 представить в виде суммы трех слагаемых, два из которых пропорциональны числам 2 и 5, так, чтобы их произведение было наибольшим.

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 43. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

.Вариант 1

1. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{3} \text{ на отрезке } [-2; 2]$$

2. Найдите промежутки возрастания (убывания), точки максимума и минимума функции:

$$y = 4x^2 + 3x - 1$$

3. Найдите промежутки знакопостоянства функции

$$y = (x - 1)^4 - 2$$

Вариант 2

1. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - 4$ на отрезке $[-4; 2]$

2. Найдите промежутки возрастания (убывания), точки максимума и минимума функции:

$$y = 2x^2 - 7x + 3$$

3. Найдите промежутки знакопостоянства функции

$$y = (x - 2)^3 - 1$$

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 44. Повторение. Решение упражнений

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание . Вариант 1.

1. Найдите производную функции:

а) $y = x^5$;

д) $y = 2\sqrt{x} + 3 \sin x$;

б) $y = 3$;

е) $y = x \cos x$;

в) $y = \frac{4}{x}$;

ж) $y = \frac{\lg x}{x}$;

г) $y = 3 - 2x$;

з) $y = (3x + 5)^4$.

2. Найдите все значения x , при которых выполняется неравенство $f'(x) > 0$, если $(x) = 6x^2 - x^3$

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 + 4$ на отрезке $[-1; 4]$.

4. Постройте график функции $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

Вариант 2.

1. Найдите производную функции:

а) $y = x^4$; д) $y = 2 \cos x - 4\sqrt{x}$;

б) $y = 4$; е) $y = x \sin x$;

в) $y = -\frac{3}{x}$; ж) $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{x}$;

г) $y = 3x + 2$; з) $y = (2x - 3)^5$.

2. Найдите все значения x , при которых выполняется неравенство $f'(x) \leq 0$, если $f(x) = 12x - x^3$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 0.5x^4 - 4x^2$ на отрезке $[-1; 3]$.

4. Постройте график функции $y = 0.5x^4 - 4x^2$

Форма отчёта: письменный ответ

Тема 1.10. Интеграл

Практическое занятие № 45-46. Правила нахождения первообразных

Количество часов - 4 часа

Методические рекомендации по выполнению

Изучить теоретический материал, выписать правила нахождения первообразных и закрепить теоретические знания при решении упражнений.

Задание

1. Доказать, что функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если:

1). $F(x) = 3x^4$, $f(x) = 12x^3$, $(-\infty; \infty)$

2). $F(x) = 3 \operatorname{tg} x$, $f(x) = \frac{3}{\cos^2 x}$, $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

3.) $F(x) = \frac{2}{3} \sqrt{x^3}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $[0; \infty)$

4). $F(x) = 0.3x^{-3}$, $f(x) = -0.9x^{-4}$, $(-\infty; \infty)$

2. Для функции f найдите первообразную, график которой проходит через точку M :

1). $f(x) = \sqrt{x}$, $M(9; 10)$

2). $f(x) = \cos x$, $M(\frac{\pi}{2}; 0)$

3). $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $M(-0.5; 3)$

4). $f(x) = 1 - x^2$, $M(-3; 9)$

3. Найдите общий вид первообразных для функции

1) $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2}$.

2) $f(x) = \sin(3x - 4)$

3) $f(x) = \frac{3}{\cos^2 5x}$

4) $f(x) = 2 \sin \frac{x}{5} + 3 \cos 6x + C$

4. Найдите одну из первообразных для функции $f(x) = \frac{1}{(7-3x)^5}$

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 47, № 48. Интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление интегралов

Количество часов - 4 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание. Изучить теоретический материал, выписать формулу Ньютона-Лейбница и закрепить теоретические знания при решении упражнений

1. Ответить на вопросы:

1) Что называется первообразной?

2) Что называется неопределённым интегралом?

- 3) Как обозначается, читается неопределённый интеграл?
 4) Что такое интегрирование?
 5) Сформулировать свойства неопределённого интеграла.
 6) Продолжите формулы

$$\int x^a dx = \dots, \int dx = \dots, \int \frac{dx}{x} = \dots, \int \sin x dx = \dots, \int \cos x dx = \dots, \int a^x dx = \dots$$

- 7). Что такое определенный интеграл?
 8). Записать формулу Ньютона-Лейбница.

2. Вычислить определенный интеграл

$$1) \int_{-\frac{2}{3}}^1 x^3 dx; \quad 2) \int_1^3 \frac{dx}{x^2}; \quad 3) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx; \quad 4) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} \quad 5) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx; \quad 6) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{5}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} dx;$$

3. Составить кроссворд по теме: Первообразная, интеграл

Форма отчёта: устный ответ, письменный ответ

Практическое занятие № 49. Площадь криволинейной трапеции

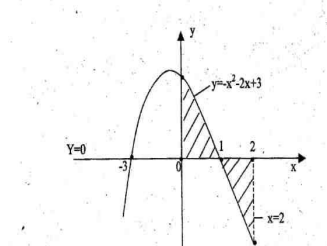
Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание.1. Рассмотреть решение примеров

Пример 1: Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 - 2x + 3$, осями координат и прямой $x = 2$.

Решение: Построим данные линии



Найдем точки пересечения графика функции с осью Ox : $y = -x^2 - 2x + 3$,
 $-x^2 - 2x + 3 = 0$,

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -3$$

$$S = -\frac{1}{3} - 1 + 3 - \left(-\frac{8}{3} - 4 + 6\right) + \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right) = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{12}{3} = 4 \text{ (кв.ед.)}$$

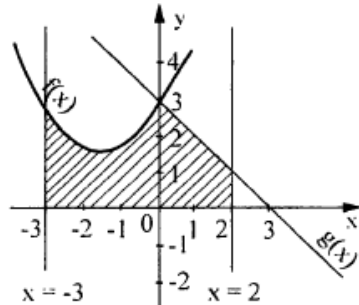
Пример 2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $f(x) = 0.5x^2 + 2x + 3$; $n=5$
 $g(x) = 3 - x$, $x = -3$, $x = 2$

Строим параболу $f(x) = 0.5x^2 + 2x + 3$

Ветви параболы направлены вверх. Вершина находится в точке $(-2; 1)$

Точка пересечения с осью ординат $(0; 3)$. Чертим параболу с помощью лекала (шаблона) параболы $y = 0.5x^2$.

Прямую $g(x) = 3 - x$ строим по двум точкам $(2; 1)$ и $(0; 3)$.



$$S = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^0 g(x)dx = \int_0^2 (0.5x^2 + 2x + 3)dx + \int_2^0 (3 - x)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{6} + x^2 + 3x \right) \Big|_0^2 + \left(3x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_2^0 = \frac{9}{2} - 9 + 9 + 6 - 2 = 8,5$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а). $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x$

б). $e = x^2$, $y = 2x$

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 50. Применение интеграла к решению практических задач

Практическое занятие № 51. Контрольная работа № 9

Количество часов - 4 часа

Методические рекомендации по выполнению

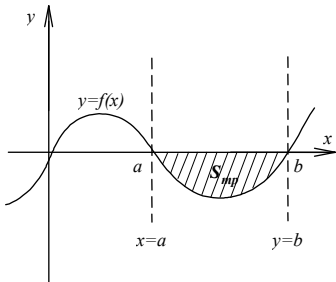
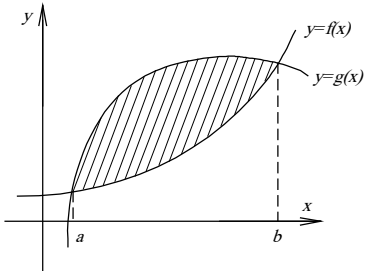
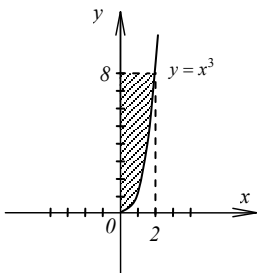
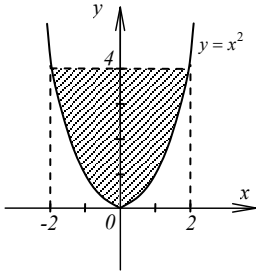
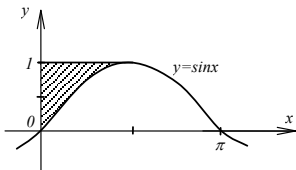
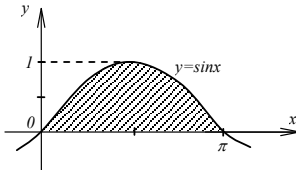
Задание

1. Повторить теоретический материал. Определение криволинейной трапеции.

Формула нахождения криволинейной трапеции.

2. Нахождение площади плоских фигур с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

3. Выполнить работу по вариантам

I вариант	II вариант
1. Контрольные вопросы	
а) что такое криволинейная трапеция? б) записать формулы для вычисления криволинейных трапеций следующего вида:	
	
2 	
3 	3 
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:	
1) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 4$; 2) $y = x^3 + 2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;	1) $y = x^2$, $y = 0$, $x = -3$; 2) $y = x^3$, $y = 0$, $x = -3$, $x = 1$;

3) $y = \sin x, y = 0, x = \frac{\pi}{2};$ 4) $y = 6 - 2x, y = 6 + x - x^2$	3) $y = \cos x, y = 0, x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}.$ 4) $y = x^2 - 4x + 4, y = 4 - x^2$
--	--

Форма отчёта: письменный ответ

Раздел 2. Геометрия

Тема 2.1. Параллельность прямых и плоскостей

Практическое занятие № 52. Предмет стереометрии. Аксиомы стереометрии. Некоторые следствия из аксиом

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание.1. Продолжите утверждение:

- 1) Если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то ...
- 2) Через две пересекающиеся прямые проходит ...
- 3) Через различные пары из трех данных точек пространства, не принадлежащих одной прямой, можно провести ... прямых.
- 4) Через различные тройки из четырех данных точек пространства, не принадлежащих одной плоскости, можно провести ... плоскостей.
- 5) Прямые, пересекающие две данные пересекающиеся прямые и не проходящие через их точку пересечения, лежат ...

2. Из следующих предложений укажите аксиомы, определения, теоремы:

- а) Углы при основании равнобедренного треугольника равны.
- б) Через две точки пространства проходит единственная прямая.
- в) Вертикальные углы равны.
- г) Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

3. Определите взаимное расположение плоскостей α и β если в них лежит треугольник ABC . Ответ обоснуйте.

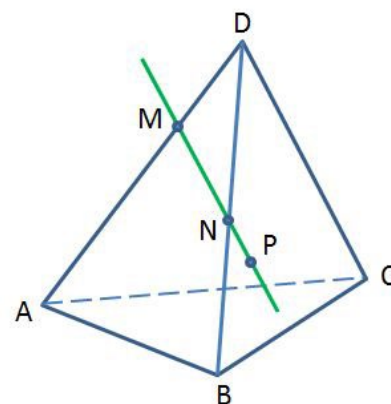
4. Сколько плоскостей может проходить через три точки?

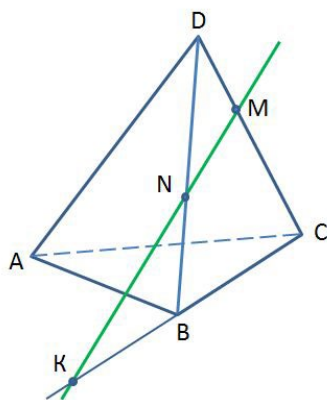
5. Найдите наибольшее число прямых, проходящих через различные пары из четырех точек.

6. Тест

Точка P лежит на прямой MN . Назовите плоскость, которой принадлежит точка P .

- 1) ABC
- 2) DBC
- 3) DAB
- 4) DAC





Каким плоскостям принадлежит точка К?

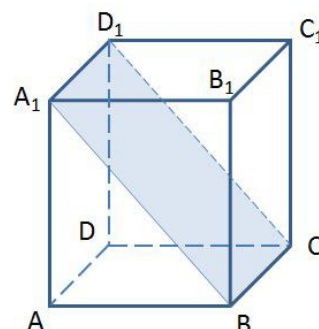
- 1) ABC и ABD
- 2) ABD и BCD
- 3) ACD и ABD
- 4) ABC и BCD

Выберите **верные** высказывания:

- 1) Любые три точки лежат в одной плоскости.
3. 2) Если центр окружности и ее точка лежат в плоскости, то и вся окружность лежит в этой плоскости.
- 3) Через три точки, лежащих на прямой, проходит только одна плоскость.
- 4) Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна
4. Выберите **неверные** высказывания:
- 1) Если три прямые имеют общую точку, то они лежат в одной плоскости.
- 2) Прямая, пересекающая две стороны треугольника, лежит в плоскости этого треугольника.
- 3) Две плоскости могут иметь только две общие точки.
- 4) Три попарно пересекающиеся в разных точках прямые, лежат в одной плоскости.

5. Назовите прямую, по которой пересекаются плоскости A_1BC и A_1AD .

- 1) DC
- 2) A_1D_1
- 3) D_1D
- 4) D_1C



6. Назовите прямую, по которой пересекаются плоскости DCC_1 и A_1AD . 1) DC
- 2) A_1D_1
 - 3) D_1D
 - 4) D_1C

Прямые AB и CD пересекаются. Через прямую AB проведена плоскость. Назовите линию пересечения данной плоскости с плоскостью BCD.

7. 1) AC
- 2) AB
- 3) BC
- 4) BD

8. Прямые AB и CD пересекаются. Через точки B и D проведена плоскость. Назовите линию пересечения данной плоскости с плоскостью ACD.

- 1) AC
- 2) AB
- 3) BC
- 4) BD

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 53. Параллельность прямых, прямой и плоскости

Практическое занятие № 54. Решение задач

Количество часов - 4 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

1. Письменно ответить на теоретические вопросы:

1 Вариант

1. Ответьте на вопросы:

- Планиметрия – это раздел геометрии, изучающий ...
- Одна из самых известных древних школ была ...
- Через любые две точки пространства не..... проходит ...
- Существует, по крайней мере четыре точки, ...
- Для прямых и плоскостей в пространстве выполняются все ...
- Для обозначения плоскости указываются ...
- Через три точки пространства можно провести ... прямых, если ...
- Если прямая имеет с плоскостью только одну общую точку, то эта прямая ...
- Две прямые в пространстве называются параллельными, если ...
- Две прямые на плоскости не параллельны, если ...
- Через точку в пространстве, не принадлежащую данной прямой, проходит ...
- В пространстве даны четыре попарно параллельные между собой прямые, не лежащие в одной плоскости. Тогда через различные пары этих прямых можно провести ... плоскостей.
- Запишите четыре пары параллельных ребер куба $A...D_1$.
- Даны три прямые a , b и c . Как могут располагаться эти прямые, чтобы можно было провести плоскость, содержащую все данные прямые.
- Даны две параллельные прямые a и b . Докажите, что любая плоскость, пересекающая одну из них, пересечет и другую.
- Найдите геометрическое место прямых, параллельных данной прямой и пересекающих другую прямую, пересекающуюся с первой.

2. Сделайте чертеж:

1. Изобразите прямую a и точки A , B и C , не принадлежащие данной прямой. Сделайте необходимые записи.
2. Изобразите плоскость α , точки E , F , принадлежащие ей, и точку G , ей не принадлежащую. Сделайте необходимые записи.
3. Изобразите прямую a , лежащую в плоскости α . Сделайте необходимую запись.
4. Изобразите две пересекающиеся плоскости α и β . Сделайте необходимую запись.

2 Вариант

1. Ответьте на вопросы:

- Стереометрия - это раздел геометрии, изучающий ...
- Основными понятиями стереометрии являются ...
- Через любые три точки пространства, не принадлежащие, проходит ...
- Если две плоскости имеют общую точку, то ...
- Для любой плоскости в пространстве существуют точки, ей ...
- Для обозначения прямой указываются ...
- Если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то эта прямая ...
- Две прямые на плоскости называются параллельными, если ...
- Две прямые в пространстве не параллельны, если ...
- Два отрезка называются параллельными, если ...
- В пространстве даны три параллельные между собой прямые, не лежащие в одной плоскости. Тогда через различные пары этих прямых можно провести ... плоскостей.
- Запишите в правильной 4-угольной пирамиде $SABCD$ все пары параллельных ребер.
- В плоскости двух параллельных прямых a и b дана точка C , не принадлежащая этим прямым. Через точку C проведена прямая c . Как может быть расположена прямая c относительно прямых a и b .

- Через точку, не принадлежащую данной прямой, проведите прямую, параллельную данной.
- Найдите геометрическое место прямых, пересекающих две данные параллельные прямые

2. Сделайте чертеж:

1. Изобразите две пересекающиеся в точке O прямые a и b и точки A, B, C , причем точка A принадлежит прямой a , B принадлежит прямой b , точка C не принадлежит данным прямым.
2. Изобразите плоскость α , не принадлежащие ей точки K, L и принадлежащую ей точку M . Сделайте необходимые записи.
3. Изобразите прямую b , пересекающую плоскость α в точке O . Сделайте необходимую запись.
4. Изобразите три пересекающиеся по прямой a плоскости α, β и γ . Сделайте необходимую запись.

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 55. Взаимное расположение прямых в пространстве.

Практическое занятие № 56. Угол между двумя прямыми

Количество часов - 4 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

1. Ответить на вопросы:

- Каково взаимное положение двух прямых в пространстве, если они имеют две общие точки?
- Могут ли две различные прямые в пространстве иметь более одной общей точки?
- Могут ли две различные плоскости иметь только одну общую точку?
- Плоскости α и β пересекаются по прямой m . Прямая a принадлежит плоскости α и пересекает плоскость β в точке M . Принадлежит ли точка M прямой m ?
- Постройте точку пересечения прямой AB с плоскостью β . (точки A и B принадлежат плоскости α).

2. Решить задачи:

- а). Докажите, что если прямые AB и CD скрещивающиеся, то прямые AC и BD тоже скрещивающиеся.
- б). Через концы отрезка AB и его середину точку M проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость в точках A_1, B_1 и M_1 . Найти длину отрезка MM_1 , если отрезок AB не пересекает плоскость и если: $AA_1 = 3,2$ дм $BB_1 = 6,4$ дм.
- в). Решить предыдущую задачу при условии, что отрезок AB пересекает плоскость.

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 57. Решение задач

Практическое занятие № 58. Параллельность плоскостей.

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

1. Повторение теоретического материала.
2. Письменные ответы на теоретические вопросы.
3. Выполнение чертежей, доказательство параллельности двух плоскостей с помощью признака, решение задач.

1 Вариант

1. Закончите утверждение:

1. Если две плоскости имеют общую точку, то ...
2. Две плоскости не параллельны, если ...
3. Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости, то ...
4. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум прямым другой плоскости, то эти вторые прямые ...
5. Через точку, не принадлежащую данной плоскости, проходит единственная плоскость
6. Запишите параллельные плоскости параллелепипеда $A...D_1$.

2. Верны ли утверждения:

1. Через точку, не принадлежащую данной плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной.
2. Если две прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.
3. Существует бесконечно много прямых, параллельных данной плоскости и проходящих через точку, не принадлежащую этой плоскости.
4. Если одна из двух данных плоскостей параллельна двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

3. Докажите утверждение:

1. Докажите, что две плоскости, параллельные одной и той же третьей плоскости, параллельны между собой.
2. Отрезки AB и CD лежат соответственно в параллельных плоскостях α и β (рис. 2). Как могут располагаться относительно друг друга прямые AC и BD ? Могут ли они быть параллельными?

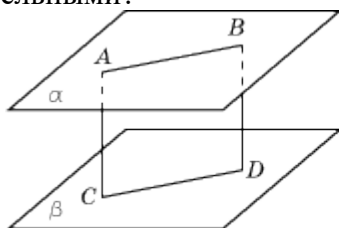


Рис. 2

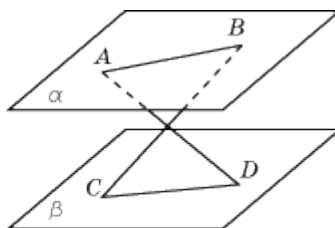


Рис. 3

2 Вариант**1. Закончите утверждение:**

1. Две плоскости в пространстве называются параллельными, если ...
2. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то ...
3. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то ...
4. Две грани многогранника параллельны, если они ...
5. Через точку, не принадлежащую данной плоскости, проходит ... плоскостей, параллельных этой плоскости.
6. В треугольной пирамиде $SABC$ проведите плоскость, параллельную ее основанию ABC .

2. Верны ли утверждения:

1. Если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна прямой, лежащей в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.
2. Если плоскость пересекает две данные плоскости по параллельным прямым, то эти плоскости параллельны.
3. Существует бесконечно много плоскостей, параллельных данной прямой и проходящих через точку, не принадлежащую этой прямой.
4. Если две плоскости параллельны одной и той же прямой, то они параллельны.

3. Докажите утверждение:

1. Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.

2. Отрезки AB и CD лежат соответственно в параллельных плоскостях a и b (рис. 3). Как могут располагаться относительно друг друга прямые AD и BC ?

4. Решите задачу:

Даны две параллельные плоскости. Через точки A и B одной из плоскостей проведены параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость в точках A_1 и B_1 . чему равен отрезок A_1B_1 , если отрезок $AB = a$?

Форма отчёта: письменный ответ

Тема 2.2. Перпендикулярность прямых и плоскостей

Практическое занятие № 59. Перпендикулярность прямой и плоскости

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Определение. Перпендикулярными называются прямые, которые пересекаются под прямым углом.

Определение. Перпендикуляром к данной прямой называется отрезок прямой, перпендикулярной к данной.

Задание

1. Письменно ответить на теоретические вопросы.

3. Выполнить чертежи, решить задачи

1. Закончите утверждение:

1. Прямая называется перпендикулярной плоскости, если ...

2. Признак перпендикулярности прямой и плоскости заключается в том, что ...

3. Через любую точку пространства проходит ... прямая, перпендикулярная данной плоскости.

4. Высотой пирамиды называется ...

2. Сделайте чертеж и решите задачи.

1. Через центр O квадрата $ABCD$ проведена прямая OK , перпендикулярная плоскости этого квадрата. Докажите, что прямая AK перпендикулярна прямой BD .

2. Точка M принадлежит боковой грани ABD треугольной пирамиды $ABCD$, у которой $AB = BD$ и $AC = CD$. Постройте сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой AD .

Практическое занятие № 60. Перпендикулярность прямой и плоскости

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению**Задание****1. Закончите утверждение:**

1. Плоскость называется перпендикулярной прямой, если ...

2. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то ...

3. Перпендикуляром, опущенным из точки на плоскость, называется ...

4. Через любую точку пространства проходит ... плоскость, перпендикулярная данной прямой.

2. Сделайте чертеж и решите задачи.

1. Через точку M – середину стороны AB равностороннего треугольника ABC проведена прямая MN , перпендикулярная плоскости этого треугольника. Докажите перпендикулярность прямых AB и NC .

2. В прямоугольном параллелепипеде $A...D_1$ постройте сечение, проходящее через точку K , внутреннюю точку диагонального сечения AA_1C_1C , и перпендикулярное прямой BB_1 .

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 61-62. Перпендикуляр и наклонные. Решение задач

Количество часов - 4 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

1. Сделать конспект основных определений темы.
2. Решить задачи:
 - Наклонная AM , проведенная из точки A к данной плоскости, равна d . Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если угол между прямой AM и данной плоскостью равен 45° ?
 - В пирамиде боковые ребра одинаково наклонены к плоскости основания. В какую точку проектируется вершина пирамиды?
 - Длина наклонной 18 см. Угол между наклонной и плоскостью 30° . Чему равна длина проекции наклонной на эту плоскость?
 - Из точки лежащей вне плоскости проведены к этой плоскости две наклонные под углом 30° , равные $2\sqrt{3}$. Их проекции образуют между собой угол 120° . Определить расстояние между основаниями наклонных.
 - Прямоугольный треугольник ABC опирается катетом AC на плоскость α , образуя с ней двугранный угол в 60° . Определить гипотенузу BC , если $AC=a$ и расстояние от вершины B до плоскости равно b .
 - Катеты прямоугольного треугольника ABC равны 12 и 16 дм. Из вершины прямого угла C восстановлен к плоскости треугольника перпендикуляр $CM = 28$ дм. Найти расстояние от точки M до гипотенузы.

Практическое занятие № 63. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный угол

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

1. Самостоятельное изучение теоретического материала.
 2. Письменные ответы на теоретические вопросы.
 3. Выполнение чертежей, применяя определение угла между прямой и плоскостью
- решение задач:
1. Наклонная AM , проведенная из точки A к данной плоскости, равна d . Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если угол между прямой AM и данной плоскостью равен 45° ?
 2. Закончите утверждение:
 - a). Углом между наклонной и плоскостью называется ...
 - b). Равные наклонные, проведенные к плоскости из одной точки, образуют с ней ...
 - c). В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ прямая AA_1 образует с плоскостью ABC угол ...
 - d). В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ прямая $A_1 D$ образует с плоскостью DCD_1 угол ...
 - e). Двугранным углом называется фигура ...
 - f). Ребром двугранного угла называется ...
 - g). Линейным углом двугранного угла называется...
 - n). Гранями двугранного угла называются ...
 - m). Величиной двугранного угла называется ...
 - k). Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется...
 3. Проведите к данной плоскости через данную на ней точку прямую, образующую с плоскостью угол 90° .
 4. На одной грани двугранного угла взяты две точки A и B . Из них опущены перпендикуляры AA_1, BB_1 на другую грань AA_2, BB_2 и на ребро двугранного угла. Найдите BB_2 , если $AA_1 = 6$ см, $BB_1 = 3$ см, $AA_2 = 24$ см.

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 64. Перпендикулярность плоскостей. Решение задач

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание.1. Закончить предложение:

- а) две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если... (угол между ними равен 90°)
 б) прямая называется перпендикулярной к плоскости, если... (она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости)
 в) если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они... (параллельны)
 г) если плоскость перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она... (перпендикулярна и к другой прямой)
 д) если две плоскости перпендикулярны к одной прямой, то они... (параллельны)

2. Дан параллелепипед

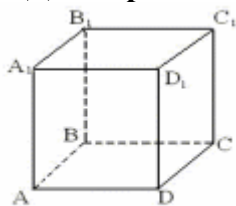


Рис.1

1. Назовите: а). рёбра, перпендикулярные к плоскости (DCC_1)

б). плоскости, перпендикулярные ребру BB_1

2. Определите взаимное расположение:

а). прямой CC_1 и плоскости (DCB)

б)/ прямой D_1C_1 и плоскости (DCB)

3. Решить задачи

1. Из точек A и B , лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB , если $AD = 5$ м, $BC = 5$ м, $CD = 1$ м

2. Прямоугольник $ABCD$ перегнули по диагонали AC так, что плоскости ABC и ACD оказались перпендикулярными. Найдите расстояние между точками B и D , если стороны прямоугольника равны 6 см и 8 см.

3. Параллельные прямые a и c лежат в плоскости α . Через каждую из этих прямых проведена плоскость, перпендикулярная плоскости α . Каково взаимное расположение полученных плоскостей?

4. Две перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой AB . Прямая CD лежит в плоскости α , параллельна AB и находится на расстоянии 60 см от нее. Точка E принадлежит плоскости α и находится на расстоянии 91 см от AB . Найдите расстояние от точки E до прямой CD .

Форма отчёта: письменный ответ

Тема 2.3. Многогранники

Практическое занятие № 65. Параллелепипед

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

1. Начертите прямоугольный параллелепипед, обозначьте его и укажите вершины, ребра и грани.

2. Прямоугольном параллелепипеде измерения равны 6, 8, 10. Найти диагональ параллелепипеда и угол между диагональю параллелепипеда и плоскостью его основания.

3. Дан прямоугольный параллелепипед, стороны основания которого равны 4 и 5, а боковое ребро равно 3. Найдите наибольшую площадь его грани.

4. В прямоугольном параллелепипеде стороны оснований 7 м и 24 м, а высота параллелепипеда 8 м. найдите площадь диагонального сечения.

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 66. Пирамида.

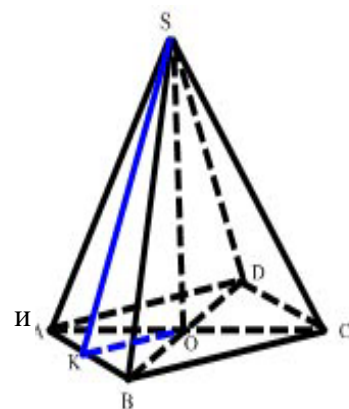
Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

1. Письменно ответить на вопросы:

- Какой многогранник называется пирамидой?
- Назовите (см. рисунок) вершину пирамиды? Основание?
- Какая пирамида называется правильной?
- Куда проектируется высота правильной пирамиды?
- Назовите угол между боковым ребром пирамиды основанием;
- Между боковой гранью и основанием;
- Угол между боковыми гранями пирамиды?



2. Решить задачи самостоятельно:

1. Объясните причину того, что не существует четырехугольной пирамиды, у которой противоположные боковые грани перпендикулярны основанию.

2. Изобразите информацию о видах пирамид в виде схемы. Изобразить пирамиду в основании которой: а). треугольник, в). четырехугольник, с). шестиугольник. Обозначить вершины и провести высоту каждой из пирамид

3. Проанализируйте, сколько граней перпендикулярных к плоскости основания, может иметь пирамида

4. Основание пирамиды - прямоугольник со сторонами 6см и 8см. Высота пирамиды равна 12см и проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найти боковые ребра пирамиды.

5. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 12см, 10см, 10см. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом 45° . Найдите площадь полной поверхности пирамиды

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 67. Усеченная пирамида

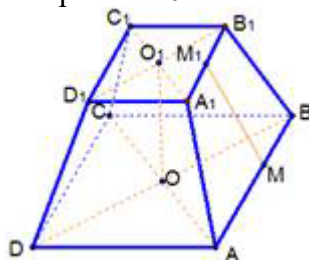
Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

Решить задачи

1. Высота правильной усеченной четырехугольной пирамиды равна 7 см. Стороны оснований равны 10 см и 2 см. Найти боковое ребро пирамиды.



2. Стороны основания правильной усеченной четырехугольной пирамиды $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$

равны 3 см и 9 см, высота – 4 см. Найти площадь боковой поверхности.

3. Стороны основания правильной усеченной треугольной пирамиды равны 4 дм и 1 дм. боковое ребро равно 2 дм. Найти высоту пирамиды.

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 68. Правильные многогранники

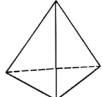
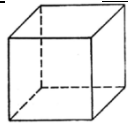
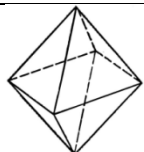
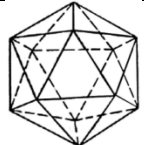
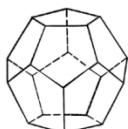
Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание. 1. Письменно ответить на вопросы:

1. Какие многогранники называются правильными?

2. Сколько их существует?
 3. Какие тела носят название тела Платоновы тела?
 4. Зачем и для чего нужны правильные многогранники?
2. Заполнить таблицу:

Определение правильного многогранника	Изображение	Число граней (Г)	Число вершин (В)	Число рёбер (Р)	Форма грани	Число граней, сходящихся в одной вершине	Сумма плоских углов при вершине
Тетраэдр -							
Куб (гексаэдр) - ...							
Октаэдр -							
Икосаэдр -							
Додекаэдр -							

3. Решите задачу:

Найдите двугранные углы правильного тетраэдра

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 69. Контрольная работа №10

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание. Решить задачи:

1. Найдите поверхность прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям: 8 см, 22 см, 16 см.
2. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 4 см, а апофема образует с плоскостью основания угол 60° . найдите:
 - а) высоту пирамиды;
 - б) боковую поверхность пирамиды.
3. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 6, а апофема 6,5. Найдите периметр основания этой пирамиды.
4. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 2 см, а стороны оснований 3 см и 5 см. Найдите диагональ этой пирамиды.

* **Творческая работа** (по желанию):

Изготовить модель любого многогранника ($15 \leq H \leq 20$)

Форма отчёта: письменный ответ, изготовление модели

Тема 2.4. Векторы в пространстве

Практическое занятие № 70. Понятие вектора в пространстве**Количество часов - 2 часа****Методические рекомендации по выполнению****Задание**

1. **Письменно** ответить на теоретические вопросы, предварительно изучив, теоретический материал:

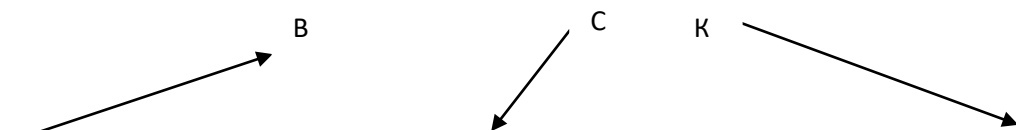
1. Вектором в пространстве называется ...
2. Вектор обозначается ...
3. Вектор изображается ...
4. Длиной вектора называется ...
5. Два вектора в пространстве называются одинаково направленными, если ...
6. Модулем вектора называется ...
7. Два вектора в пространстве называются противоположно направленными, если ...
8. Равные векторы соответственно имеют равные...
9. Координатами вектора с началом в точке $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и концом в точке $A_2(x_2; y_2; z_2)$ называются числа...

2. Решить задачи:

1. Даны четыре точки $A(2; 7; -3)$, $B(1; 0; 3)$, $C(-3; -4; 5)$, $D(-2; 3; -1)$. Указать среди векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ равные векторы.
2. Даны три точки $A(1; 0; 1)$, $B(-1; 1; 2)$, $C(0; 2; -1)$. Найдите точку $D(x; y; z)$, если векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны.
3. Даны векторы $(\overline{2; n; 3})$ и $(\overline{3; 2; m})$. При каких m и n эти векторы коллинеарны?

Форма отчёта: Устный ответ, письменный ответ**Практическое занятие № 71. Сложение и вычитание векторов****Количество часов - 2 часа****Методические рекомендации по выполнению****Задание**

1. Показать на рисунках – сложение векторов по правилу треугольника и по правилу параллелограмма, правило вычитания векторов.
2. Сколько векторов задают всевозможные пары точек, составленные из вершин правильной четырехугольной пирамиды?
3. На рисунке изображены векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CK}$. Точки A , B , C – начала данных векторов; точки M , N , K – их концы.



4. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ называют равными, если они $\overline{AM}$ и их длины $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$.
5. Назовите законы сложения для векторов: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – $\overline{MN}$ закон, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ – $\overline{NK}$ закон.
6. Произведение любого вектора на число нуль есть $\overline{0}$ вектор.
7. Изобразите правильный тетраэдр $ABCD$ и нарисуйте вектор: а) $\overline{AB} + \overline{BC}$; б) $\overline{CD} - \overline{CA}$;
8. Нарисуйте параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, обозначьте вектор $\overline{CD}$ и $\overline{BC}$, соответственно через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

- а) Изобразите на рисунке векторы $\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{a} - \vec{b}$;

б) Изобразите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}$

Форма отчёта: Письменный ответ

Практическое занятие № 72. Умножение вектора на число

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

1. Для данного вектора $\vec{m}$ (задать произвольно) постройте векторы: а) $-\vec{m}$; б) $2\vec{m}$; в) $-\frac{1}{3}\vec{m}$

2. Дан вектор $\vec{m}(2; -3; 5)$. Найти вектор $2\vec{m}$; $-6\vec{m}$; $0,5\vec{m}$.

3. Нарисуйте параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, обозначьте вектор $\vec{CD}$ и $\vec{BC}$, соответственно через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Изобразите на рисунке векторы $2\vec{a}$; $\frac{1}{3}\vec{b}$.

Форма отчёта: Устный ответ, письменный ответ

Практическое занятие № 73. . Скалярное произведение векторов

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

1. Выписать и выучить определения темы;

2. Записать в тетрадь и понять решение всех ниже рассмотренных задач (примеры 1 – 7)

Пример 1

Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$

Решение: Используем формулу $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b})$.

В данном случае:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) = 2 \cdot 5 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

Ответ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5\sqrt{3}$

Значения косинуса можно найти в **тригонометрической таблице**.

Свойства:

1). Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы параллельны;

2). Скалярное произведение равно нулю, т.к. векторы перпендикулярны. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$;

3). Скалярный квадрат вектора a равен квадрату его длины, т.е. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$
 $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Свойства скалярного произведения доказываются точно так же, как и в планиметрии.

1. **Скалярное** произведение равно произведению их длин, т.е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$.

2. **Скалярное** произведение $\vec{a} \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} \{x_2, y_2, z_2\}$ выражается формулой

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

3. **Ненулевые** векторы $\vec{a} \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} \{x_2, y_2, z_2\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Законы

1. $\vec{a}^2 \geq 0$, причем $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq 0$.
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон).
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (распределительный закон).
4. $k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b}$ (сочетательный закон).

Примеры решения задач:

1. Найти $|\vec{AB}|$ если известно, что A (-3,-2,4) B(-4, 3,2).

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-4 + 3)^2 + (3 + 2)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{30}$$

Ответ: $\sqrt{30}$

2. Дано:

$$\vec{a} \{3; -1; 1\}, \vec{b} \{-5; 1; 0\}, \vec{c} \{-1; -2; 1\}.$$

Найти косинус угла между векторами:

- а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$, б) $\vec{b}$ и $\vec{c}$, в) $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

Решение:

$$\text{а) } \cos \left(\vec{a} \wedge \vec{b} \right) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\cos \left(\vec{a} \wedge \vec{b} \right) = 3 \cdot (-5) + (-1) \cdot (1) + 1 \cdot 0 = -16 < 0, \text{ значит угол тупой.}$$

$$\text{б) } \cos \left(\vec{b} \wedge \vec{c} \right) = \vec{b} \cdot \vec{c} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = (-5) \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = 5 + (-2) = 3 > 0, \text{ угол острый.}$$

$$\text{в) } \cos \left(\vec{a} \wedge \vec{c} \right) = \vec{a} \cdot \vec{c} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = -3 + 2 + 1 = 0, \text{ угол прямой.}$$

Ответ: а) тупой, б) острый, в) прямой.

Свойства скалярного произведения векторов

Для произвольных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и любого числа λ справедливы следующие свойства:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ — переместительный или **коммутативный** закон скалярного произведения.

2) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ — распределительный или **дистрибутивный** закон скалярного произведения. Попросту, можно раскрывать скобки.

3) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ — сочетательный или **ассоциативный** закон скалярного произведения. Константу можно вынести из скалярного произведения.

Пример 1. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = (4; -3; 1)$ и $\vec{b} = (5; -2; -3)$.

Решение

По формуле находим $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 5 + (-3) \cdot (-2) + 1 \cdot (-3) = 23$.

Поскольку $23 \neq 0$, то данные вектора не перпендикулярны.

Пример 2. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

$$1) |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 1, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$$

Решение: Известны длины векторов и угол между ними, т.е. следует использовать формулу

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\varphi).$$

Подставим в формулу:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\varphi) = 3 \cdot 1 \cdot \cos(45^\circ) = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Замечание: угол между векторами острый – скалярное произведение положительно.

Ответ: $\sqrt{2}$

Пример 3

$$|a| = 6, |b| = 7, \angle(a, b) = 120^\circ$$

Решение: Известны длины векторов и угол между ними, т.е. следует использовать формулу

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\varphi)$$

Подставим в формулу:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 6 \cdot 7 \cdot \cos(120^\circ) = 42 \left(-\frac{1}{2}\right) = -21$$

Замечание: угол между векторами тупой – скалярное произведение отрицательно.

Ответ: -21

Пример 4

$$|a| = 4, |b| = 2, \angle(a, b) = 90^\circ$$

Решение:

Известны длины векторов и угол между ними, т.е. следует использовать формулу

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\varphi)$$

Подставим в формулу:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 4 \cdot 2 \cdot \cos(90^\circ) = 8 \cdot 0 = 0$$

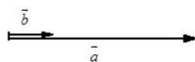
Замечание: угол между векторами прямой (вектора перпендикулярны) – скалярное произведение равно нулю.

Ответ: 0

Пример 5

$$|a| = 5, |b| = 1, \text{ а и b сонаправлены.}$$

Решение: Известны длины векторов и то, что они сонаправлены, т.е. они параллельны или лежат на одной прямой и направлены в одну сторону.



Угол между ними равен нулю. Используем ту же формулу

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\varphi)$$

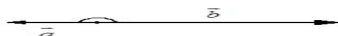
Подставим в формулу:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 5 \cdot 1 \cdot \cos(0^\circ) = 5 \cdot 1 = 5$$

Пример 6

$$|a| = 2, |b| = 3, \text{ а и b противоположно направлены.}$$

Решение: Известны длины векторов и то, что они противоположно направлены, т.е. они параллельны или лежат на одной прямой и направлены в разные стороны.



Угол между ними развернутый, т.е. равен 180 градусов.

Подставим в формулу:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \cos(180^\circ) = 2 \cdot 3 \cdot (-1) = -6$$

Пример 7

Найти угол φ между векторами $a = \{1; -1; 2\}$ и $b = \{-1; 0; 8\}$

Решение:

Применим формулу

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Подставим

$$\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \frac{1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 8}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 8^2}} = \frac{15}{\sqrt{6} \sqrt{65}} = \frac{15\sqrt{390}}{390} = \\ &= \frac{\sqrt{390}}{26} \\ \varphi &= \arccos\left(\frac{\sqrt{390}}{26}\right) \end{aligned}$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{390}}{26}\right)$$

3. Решить самостоятельно:

1. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если их длины и угол между ними представлены следующими значениями:

$$|\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = 8; \quad \varphi(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}.$$

2. Даны четыре точки A(0; 1; -1), B(1; -1; 2), C(3; 1; 0) и D(2; -3; 1). Найдите косинус угла φ между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

Форма отчёта: Письменный ответ

Практическое занятие № 74. Решение задач

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание. Решить задачи:

1. Даны четыре точки A(2; 7; -3), B(1; 0; 3), C(-3; -4; 5), D(-2; 3; -1). Укажите среди векторов

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ равные векторы.

2. Дать определение коллинеарных векторов и решить задачу:

Даны векторы $(2; n; 3)$ и $(3; 2; m)$. При каких m и n эти векторы коллинеарны?

3. Даны точки A(2; -3; -8), B(-1; 2; 5), C(0; -4; 11)

- Найдите координаты вектора AB;
- Найдите координаты вектора BC;
- Найдите длину вектора AB;
- Найдите длину вектора BC;
- Произведение $5 \cdot \overrightarrow{AB}$;

4. Даны три точки A(0; 1; -1), B(1; -1; 2), C(3; 1; 0). Найдите косинус угла C треугольника ABC.

Форма отчёта: Письменный ответ

Тема 2.5. Метод координат в пространстве

Практическое занятие № 75. Декартовы координаты и векторы в пространстве

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание: 1. Выпишите номера верных утверждений:

- a. Если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \uparrow \vec{b}$.
 - b. Если $\vec{a} = -\vec{b}$, то $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.
 - c. Если $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.
 - d. Если $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, то $\vec{a} = \vec{b}$.
 - e. Если скалярное произведение векторов равно 0, то они взаимно перпендикулярны.
 - f. Скалярное произведение векторов всегда есть неотрицательное число.
 - g. Скалярное произведение нулевых векторов есть нулевой вектор.
 - h. Скалярный квадрат любого вектора есть неотрицательное число.
 - i. Скалярное произведение коллинеарных векторов равно произведению их длин.
 - j. Скалярное произведение ненулевых сонаправленных векторов всегда есть положительное число.
2. Найти координаты вектора AB, если A(-3;3;12) и B(5;-2;-4)
 3. Найти сумму векторов a(-3; -5;-4) и b(-6; -4; -10)
 4. Найти сумму векторов $a(\frac{2}{5}; \frac{3}{4}; \frac{1}{2})$, $b(\frac{1}{2}; \frac{4}{5}; \frac{1}{8})$, $c(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; \frac{4}{5})$
 5. Где лежат те точки пространства, для которых координаты x и y равны нулю?
 6. Даны точки A(1;2;3), B(0;1;2), C(0;0;3), D(1;2;0). Какие из этих точек лежат: 1) в плоскости (xy); 2) на оси z; 3) в плоскости (yz)?
 7. Дана точка A(1;2;3). Найдите основание перпендикуляров, опущенных из этой точки на координатные оси и координатные плоскости.
 8. Найдите расстояния от точки (1;2;-3) до: 1) координатных плоскостей; 2) осей координат; 3) начала координат.
 9. В плоскости xy найдите точку D(x;y;0), равноудаленную от трех данных точек: A(0;1;-1), B(-1;0;1), C(0;-1;0).

Форма отчёта: устный ответ, письменный ответ

Практическое занятие № 76. Координаты середины отрезка

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание:

1. Найти координаты точки C, середины отрезка AB заданного точками A(-1, 3) и B(6, 5).
2. Найти координаты точки B, если известны координаты точки C(1; 5), середины отрезка AB и точки A(-1, 3).
3. Найти координаты точки C середины отрезка AB заданного точками A(-1, 3, 1) и B(6, 5, -3).
4. Найти координаты точки B если известны координаты точки C(1, 5, 2), середины отрезка AB и точки A(-1, 3, 10).
5. Докажите, что четырехугольник ABCD является параллелограммом, если A(0; 2; -3),

B(-1; 1; 1), C(2; -2; -1), D(3; -1; -5)

Форма отчёта: письменный ответ.

Практическое занятие № 77. Расстояние между точками

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание:

1. **Самостоятельно** изучить теорию по расстоянию между точками:
 - плоскости;

- пространства.
- 2. Составить краткий конспект;
- 3. Привести примеры решения задач (по 2 задачи) темы для:
 - плоскости;
 - пространства.
- 4. Решить задачи:
 - 1). Найти расстояния между точками плоскости с координатами:
 - a) $A(3,5)$ и $B(3,42)$; b). $C(2, 1)$ и $D(-5, 1)$
 - 2). На оси x найти точку $C(x; 0; 0)$ равноудаленную от двух точек $A(1; 2; 3)$, $B(-2; 1; 3)$.

Форма отчёта: письменный ответ.

Практическое занятие № 78. Преобразование симметрии в пространстве

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание:

1. Повторить теорию

- симметрия в пространстве;
- симметрия в природе и на практике.

2. Составить краткий конспект;

3. Решить задачи:

1). Даны три точки $(1; 2; 3)$, $(0; -1; 2)$, $(1; 0; -3)$. Найдите точки симметричные данным относительно координатных плоскостей.

2). Даны точки $(1; 2; 3)$, $(0; -1; 2)$, $(1; 0; -3)$. Найдите точки симметричные им относительно начала координат.

4. Нарисовать 2 рисунка симметрии встречающейся в природе и 2 рисунка симметрии которая используется на практике, в строительстве и технике.

Форма отчёта: письменный ответ

Практическое занятие № 79. Решение задач

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание:

Решить задачи:

1. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является ромбом, если $A(0; 2; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(2; 0; 2)$, $D(1; 2; 2)$.

2. Даны один конец отрезка $A(2; 3; -1)$ и его середина $C(0; 1; 3)$. Найдите второй конец отрезка $B(x; y; z)$.

3. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если координаты трех других его вершин известны $A(4; 2; -1)$, $B(1; -3; 2)$, $C(-4; 2; 1)$.

4. Даны точки $A(4; 0; -1)$, $B(0; -3; 2)$, $C(-4; 2; 1)$. Найдите точки симметричные данным относительно координатных плоскостей.

Форма отчёта: письменный ответ.

Тема 2.6. Цилиндр, конус и шар

Практическое занятие № 80. Конус.

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание 1.

Начертить конус и ответить на вопросы:

1. Конусом называется ...
2. Конус получается следующим образом ...
3. Высотой конуса называется ...
4. Вершиной конуса называется ...
5. Образующими конуса называются ...

6. Боковой поверхностью конуса называется ...
7. Усеченным конусом называется ...
8. Высотой усеченного конуса называется ...
9. Наклонным конусом называется ...
10. Высотой наклонного конуса называется ...

Задание 2. Решить задачи:

1. Осевое сечение конуса представляет собой прямоугольный треугольник с катетом равным 5 см. Чему равна высота конуса?
2. Радиус основания конуса R . Осевым сечением является прямоугольный треугольник. Найдите его площадь.
3. Через вершину конуса проведено сечение под углом 30° к его высоте. Найдите площадь сечения, если высота конуса равна $3\sqrt{3}$ см, а радиус основания 5 см.
4. Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 1:3, образующая составляет с плоскостью основания угол 45° , высота равна 4. Найдите площади оснований.

Форма отчёта: письменный ответ.

Практическое занятие № 81. Решение задач

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

1. Ответить на вопросы

1. Какая фигура получается в сечении конуса плоскостью, проходящей через ось конуса?
2. Какая фигура получается в сечении цилиндра плоскостью, проходящей перпендикулярно оси цилиндра?
3. Что представляет собой сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса?

2. Решить задачи

1. Образующая конуса l наклонена к плоскости основания под углом в 30° . Найдите высоту конуса и площадь осевого сечения.
2. Чему равна площадь осевого сечения конуса, если его высота в 2 раза больше радиуса основания и равна 5 см?
3. Образующая конуса, равна 12 см, наклонена к плоскости основания под углом α . Найдите площадь основания конуса, если: а) $\alpha = 30^\circ$; б) $\alpha = 45^\circ$; в) $\alpha = 60^\circ$.
4. Образующая конуса равна 18 см и наклонена к плоскости основания под углом 60° . Найдите площадь осевого сечения и площадь основания конуса.
5. Найдите высоту конуса, если площадь его осевого сечения равна 6 дм^2 , а площадь основания равна 8 дм^2 .
6. Высота конуса равна 8 дм. На каком расстоянии от вершины конуса надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площадь сечения была равна: а) половине площади основания; б) четверти площади основания.

Форма отчёта: письменный ответ.

Практическое занятие № 82. Шар и сфера

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание. 1. Ответьте на вопросы:

- Шаром с центром в точке O и радиусом R называется ...
- Сферой с центром в точке O и радиусом R называется ...
- Большим кругом называется ...
- Плоскость называется касательной к сфере, если ...
- Сечением шара плоскостью является ...

2. Решите задачи

1. Шар, радиус которого равен 10 см, пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 см от центра. Найдите площадь сечения.

2. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярно к нему плоскость. Как относится площадь большого круга данного шара к площади получившегося сечения?

3. Стороны треугольника касаются сферы. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если радиус сферы равен 5 см, а стороны треугольника равны 12 см, 10 см, 10 см.

Форма отчёта: письменный ответ.

Практическое занятие № 83. Решение задач

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

1. **Изобразить** фигуры вращения: цилиндр; конус; усеченный конус; шар

2. **Обозначить** основные элементы каждой фигуры и дать им определения;

3. **Решить** задачи:

1). Радиус основания конуса 3 м, высота 4 м. Найдите образующую.

2). Радиус основания конуса равен 6 м. Осевым сечением является прямоугольный треугольник. Найдите его площадь.

3). Радиусы оснований усеченного конуса 3 м и 6 м, высота 4 м. Найдите образующую.

4). Шар радиус которого 41 м, пересечен плоскостью на расстоянии 9 м от центра. Найдите площадь сечения.

5. Через конец радиуса шара проведена плоскость, составляющая с ним 30° . Найдите площадь сечения шара этой плоскостью, если радиус шара равен 6 см.

Форма отчёта: письменный ответ.

Тема 2.7. Объемы тел

Практическое занятие № 84. Объем прямоугольного параллелепипеда. Объем прямой и наклонной призмы

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание 1. 1. В прямоугольном параллелепипеде с **квадратным** основанием **р** – сторона основания, **с** – высота. Заполните таблицу последовательно по столбцам:

	А	Б	В	Г	Д	Е
р	3		6	2	$3\sqrt{2}$	
с	4	11			$\sqrt{15}$	1
V		1,76	122,4	$12\sqrt{13}$		С

2. Дан прямоугольный параллелепипед, основанием которого является **квадрат**. Заполните таблицу последовательно по столбцам::

	А	Б	В	Г	Д	Е
Сторона квадрата			3,5			
Диагональ квадрата	$5\sqrt{2}$			$2\sqrt{2}$	d	
Периметр квадрата		$4\sqrt{3}$				P
Высота параллелепипеда	4	9,8			c	
Объём параллелепипеда			12,74	28,4		V

Задание 2. Выберите неверное утверждение:

- а). За единицу измерения объемов принимается куб, ребро которого равно единице измерения отрезков;
- б). Тела, имеющие равные объемы, равны;
- в). Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений;
- г). Объем куба равен кубу его ребра;
- д). Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

Задание 3. 1. Решить задачи:

1. Дана прямая призма в основании равносторонний треугольник, со стороной – 5 см, и высота призмы – 12 см. Найти объем, площадь основания, площадь полной поверхности призмы.
2. Дана наклонная призма в основании правильный четырехугольник, сторона основания 4 см, высота 15 см, Найти объем, площадь основания, площадь полной поверхности призмы.

Форма отчёта: письменный ответ.

Практическое занятие № 85. Объем пирамиды, усеченной пирамиды

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

1. Ответить на вопросы:

- 1). Объем – это величина, ...
- 2). Кубическим сантиметром называется ...
- 3). Равные пространственные фигуры имеют ...
- 4). Объем пирамиды вычисляют по формуле ...
- 5). Формула объема прямого цилиндра имеет вид ...
- 6). Объем конуса вычисляют по формуле ...

2. Решите задачи:

1. По стороне основания a и боковому ребру b найдите объем правильной пирамиды: 1). треугольной; 2). четырехугольной; 3). шестиугольной.
2. Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 9 м и 12 м, все боковые ребра равны 12, 5 м. Найдите объем пирамиды.
3. Начертить усеченную пирамиду и записать формулу для вычисления ее объема.

Форма отчёта: письменный ответ.

Практическое занятие № 86. Объем цилиндра и конуса

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание. Решить задачи, делая рисунки по условию:

1. Осевое сечение прямого кругового цилиндра – квадрат со стороной 3 см. Найдите объем цилиндра.
2. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 2 см и наклонена к плоскости основания под углом 60° . Найдите объем цилиндра.
3. Диаметр основания конуса равен 12 см, а угол при вершине осевого сечения равен 90° . Найдите объем конуса.

Форма отчёта: письменный ответ.

Практическое занятие № 87. Объем шара и площадь сферы

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание 1. Сделать краткий конспект и выписать формулы для нахождения объема шара, объема шарового сегмента и сектора, площади сферы.

2. Решить задачи:

1). Чугунный шар регулятора имеет массу 10 кг. Найдите диаметр шара (плотность чугуна $7,2 \text{ г/см}^3$).

2). Требуется переплавить в один шар два чугунных шара с диаметрами 25 см и 35 см. Найдите диаметр нового шара.

3). Чему равен объем шарового сектора, если радиус окружности его основания равен 60 см, а радиус шара равен 75 см?

Форма отчёта: письменный ответ.

Практическое занятие № 88. Решение задач

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание

Решить задачи:

1). 25 м медной проволоки имеют массу 100,7 г. Найдите диаметр проволоки (плотность меди $8,94 \text{ г/см}^3$).

2). Куча щебня имеет коническую форму, радиус основания которой 2 м, а образующая 2,5 м. Найдите объем кучи щебня.

3). Радиусы оснований усеченного конуса 2 м и 4 м, образующая наклонена к плоскости основания под углом 45° . Найдите объем.

4). Внешний диаметр полого шара 18 см, толщина стенок 3 см. Найдите объем материала, из которого изготовлен шар.

Форма отчёта: письменный ответ.

Практическое занятие № 89. Контрольная работа № 11

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание. 1. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, длина которого равна 8 см, ширина 5 см, высота 4 см.

а). 120 см^3 ; б). 60 см^3 ; в). 160 см^3 ; г). 22 см^3 .

2. Найдите объем куба с ребром, равным 6 см.

а) 40 см^3 ; б) 16 см^3 ; в) 216 см^3 ; г) 12 см^3 .

3. Объем комнаты равен 72 м^3 . Длина комнаты 6 м, ширина 4 м. Найдите высоту комнаты.

а) 3 м; б) 2 м; в) 4 м; г) 3 м^2 .

4. Ширина прямоугольного параллелепипеда 9 см, и она меньше длины в 3 раза, но больше высоты на 6 см. Найдите сумму длин всех ребер.

5. Осевым сечением цилиндра является квадрат, площадь которого 16 см^2 . Найдите боковую поверхность и объем цилиндра.

6. Диаметр шара 12 см. Найдите его объем.

7. Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны равной 6 см. Найдите объем полученного тела вращения.

Форма отчёта: письменный ответ.

Раздел 3. Элементы комбинаторики

Практическое занятие № 90. Задачи на подсчет числа размещений, перестановок, сочетаний

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание. Решить задачи:

1. Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числе повторяться не могут.

2. Сколько трехбуквенных слов можно образовать из букв слова «АРБУЗ»?

3. В шахматном турнире участвуют 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?

4. Сколько существует вариантов рассаживания вокруг стола 6 гостей на 6 стульях?

Форма отчёта: письменный ответ.

Раздел 4. Элементы теории вероятностей и математической статистики

Практическое занятие № 91. Событие, вероятность события, сложение и умножение вероятностей

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание 1.

Решить задачи:

1. Найти среди событий A_n , достоверные и невозможные:
 A_1 – «появление 10 очков при бросании игральной кости»;
 A_2 – «появление 10 очков при бросании трех игральных костей»;
 A_3 – «появление 20 очков при бросании трех игральных костей»;
 A_4 – «наугад выбранное двузначное число не больше 100»;_
 A_5 – «появление двух гербов при бросании двух монет».
2. Являются ли несовместными события A_1 и A_2 :
 1) испытание – бросание монеты; события:
 A_1 – «появление герба», A_2 – «появление цифры»;
 2) испытание – бросание игральной кости; события: A_1 – «появление трех очков»; A_2 – «появление нечетного числа очков»;
 3) испытание – бросание двух монет; события:
 4) A_1 – «появление герба на одной из монет», A_2 – «появление герба на второй монете»?
3. Найти сумму событий:
 Испытание – два выстрела по мишени; события:
 A – «попадание с первого выстрела», B – «попадание со второго выстрела»;
4. Найти произведение событий:
 Испытание – два выстрела по мишени; события:
 A – «попадание первым выстрелом», B – «попадание вторым выстрелом»

Задание 2. Рассмотреть решение задач и записать в тетрадь

Задача 1. Брошена игральная кость. Какова вероятность того, что выпадет четное число очков?

1,3,5 – нечетные числа, 2,4,6 – четные. Число возможных исходов при бросании игральной кости – 6, число благоприятных исходов – 3 (т.е. выпадение двойки, четверки или шестерки). Таким образом, вероятность выпадения четного числа очков равна $3:6 = 1/2$ или 0,5.

Задача 2. Брошена игральная кость. Какова вероятность того, что выпадет число меньше 4?

Другими словами – какова вероятность того, что выпадете либо 1, либо 2, либо 3.

Число возможных исходов – 6, число благоприятных исходов – 3 (т.е. выпадение 1,2 или 3). Таким образом, вероятность выпадения числа меньше 4 равна $3:6 = 0,5$.

Задача 3. В ящике 6 белых и 4 черных шара. Какова вероятность того, что первый наудачу выбранный шар окажется белым?

Всего 10 шаров, значит число возможных исходов – 10. Число благоприятных исходов – 6, потому что в ящике 6 белых шаров. Вероятность того, что первый выбранный шар окажется белым – $6:10 = 0,6$.

Задача 4. Набирая номер телефона, абонент забыл последнюю цифру. Какова вероятность того, что он правильно дозвонится, набрав последнюю цифру наугад?

Итак, абоненту нужно выбрать одну цифру из 10, т.е. число возможных исходов – 10. Число благоприятных исходов – 1, потому что верной может быть только одна цифра. Вероятность того, что абонент правильно дозвонится, равна $1:10 = 0,1$.

Задача 5. Ученика попросили назвать число от 1 до 100. Какова вероятность того, что он назовет число 56?

Число возможных исходов – 100, т.е. 100 чисел. Верно названное число – одно, это 56. Значит, благоприятный исход один. Вероятность того, что ученик назовет число 56, будет $1:100=0,01$.

Ответ: 0,01.

Задача 6. Ученика попросили назвать число от 1 до 100. Какова вероятность того, что он назовет число, кратное пяти?

Число возможных исходов – 100. Чисел, кратных пяти – 20 (5,10,15,20,25,30,35,40,45,50,55,60,65,70,75,80,85,90,95,100), т.е. число благоприятных исходов – 20. Вероятность, что ученик назовет число, кратное пяти равна $20:100=0,2$.

Ответ: 0,2.

Форма отчёта: письменный ответ.

Практическое занятие № 92. Представление данных (таблицы, диаграммы, графики)

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание 1. Решить задачу.

Рост учащихся 9 класса 157, 165, 165, 168, 165, 161, 165, 160, 162, 169, 171, 170, 170, 175, 173, 170, 177, 182, 186, 182, 160, 173, 165, 162, 174, 77. Составить ранжированный ряд; определить средний рост, моду ряда, медиану ряда, размах.

Решение:1. Ранжированный ряд

157,160,160,161,162,162,165,165,165,165,165,168,169,170,170,170,171,173,173,174, 175,177,177,182, 186.

2. Средний рост 168,96 см

3. Мода ряда (наиболее часто встречающийся рост):165 см

4. Медиана ряда: 169 см

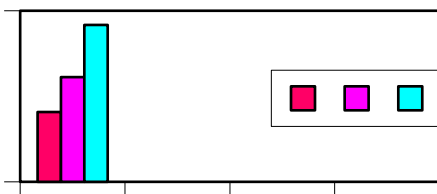
(у 12 учащихся рост меньше 169см, у 12 учащихся рост больше169см)

5. Размах 29 см

Наглядное представление статистической информации

50

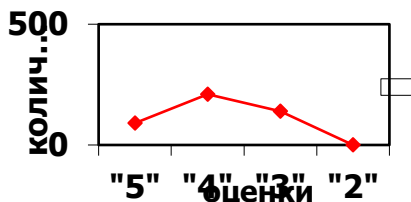
0



Гистограмма



Круговая диаграмма



График

Простая средняя арифметическая — равна отношению суммы индивидуальных

значений признака к его количеству.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Задача: Бригада из 6 рабочих получает в месяц 3 3,2 3,3 3,5 3,8 3,1 тыс. руб.

Найти среднюю заработную плату.

Решение: $(3 + 3,2 + 3,3 + 3,5 + 3,8 + 3,1) / 6 = 3,32$ тыс. руб.

Взвешенная средняя арифметическая – равна отношению (суммы произведений значения признака к частоте повторения данного признака) к (сумме частот всех признаков). Используется, когда варианты исследуемой совокупности встречаются неодинаковое количество раз.

Представим это в виде следующей формулы:

$$\bar{x} = \sum x_i w_i / \sum w_i$$

x_i — цена за единицу продукции; w_i — количество (объем) продукции;
закон ее распределения:

X	5	4	3
p	0,2	0,5	0,3

Решение: По формуле находим математическое ожидание:

$$M(X) = 5 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,3 = 3,3.$$

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Задача: Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X	1	2	5
p	0,3	0,5	0,2

Решение: По формуле находим математическое ожидание:

$$M(X) = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,2 = 2,3.$$

Записываем все возможные значения квадрата отклонения:

$$[X_1 - M(X)]^2 = (1 - 2,3)^2 = 1,69;$$

$$[X_2 - M(X)]^2 = (2 - 2,3)^2 = 0,09;$$

$$[X_3 - M(X)]^2 = (5 - 2,3)^2 = 7,29.$$

Тогда закон распределения квадрата отклонения имеет следующий вид:

$[X - M(X)]^2$	1,69	0,09	7,29
p	0,3	0,5	0,2

По формуле находим дисперсию:

$$D(X) = 1,69 \cdot 0,3 + 0,09 \cdot 0,5 + 7,29 \cdot 0,2 = 2,01.$$

Задание 1. 1. Рассмотреть решение № 1

Составить и решить задачу подобную задаче № 1

Задача № 1. Измерение роста детей младшей группы детского сада представлено выборкой: 92, 96, 95, 96, 94, 97, 98, 94, 95, 96.

Найти некоторые характеристики этой выборки.

Решение

1). Размер выборки (число измерений; N): 10.

2). Наименьшее значение выборки: 92. Наибольшее значение выборки: 98.

3). Размах выборки: $98 - 92 = 6$.

4). Запишем ранжированный ряд (варианты в порядке возрастания):

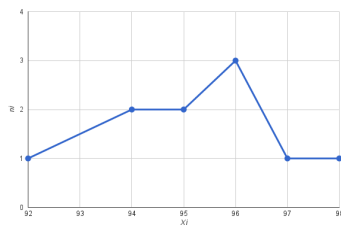
92, 94, 94, 95, 95, 96, 96, 96, 97, 98.

5). Сгруппируем ряд и запишем в таблицу (каждой варианте поставим в соответствие число ее появлений):

x_i	92	94	95	96	97	98	N
n_i	1	2	2	3	1	1	10

49

6). Построим полигон частот выборки (отметим на графике варианты по оси ОХ, частоты по оси ОУ, соединим точки линией).



Задание 2. Решить задачу: Даны ряды:

1) 5,5,5,5,5

2) 2,2,3,4,4

Определить среднее, моду ряда, медиану ряда, размах для каждого ряда.

Форма отчёта: письменный ответ.

Практическое занятие № 93. Повторение. Решение задач

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Повторить:

- табличные значения первообразной;
- правила нахождения первообразной;
- формулу Ньютона-Лейбница;
- формулы для вычисления площади поверхности всех видов многогранников и фигур вращения;
- формулы для вычисления объемов всех видов многогранников и фигур вращения;

3. Уметь:

- вычислять определенные интегралы;
- находить площади фигур, ограниченные линиями;
- выполнять изображение пространственных фигур;
- решать задачи на нахождение площади поверхности и объема всех видов многогранников и фигур вращения;

4. Знать:

- Правила оформления решения упражнений и задач

Задание 1. Вычислить определенный интеграл:

$$1) \int_1^2 6dx; \quad 2) \int_1^4 x^2 dx; \quad 3) \int_0^{\pi} -3\cos 2x dx;$$

2. Крыша силосной башни имеет форму конуса. Высота крыши 2 м, а диаметр башни 6 м. Найдите поверхность крыши и объем башни.

Форма отчёта: письменный ответ.

Практическое занятие № 94. Решение задач

Количество часов - 2 часа

Методические рекомендации по выполнению

Задание.1. Вычислить определенный интеграл:

$$1) \int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}; \quad 2) \int_1^3 (x^2 + 5x - 8)dx;$$

2. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2; \quad y = 2x - x^2.$$

3. В правильной четырехугольной призме площадь основания 144 см^2 , а высота 14 см. Найдите диагональ призмы, полную поверхность и объем.

Форма отчёта: письменный ответ.

Глава 7. Комбинаторика

Теоретические сведения и методические рекомендации

Большинство комбинаторных задач решается с помощью двух основных правил – **правила суммы и правила произведения**.

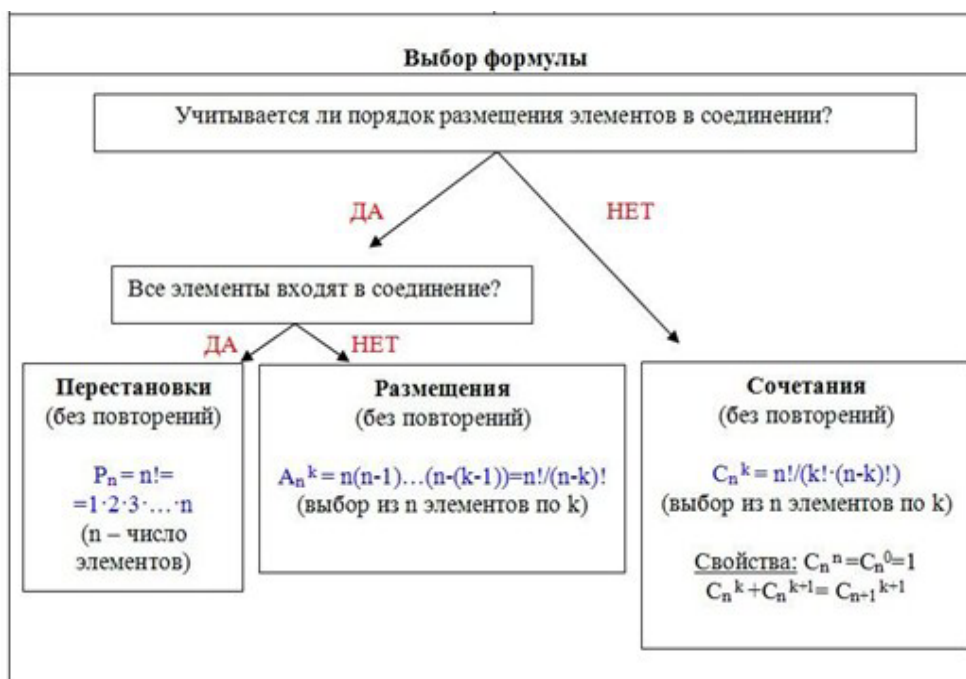
Выбор правила	
Правило суммы	Правило произведения
Если некоторый объект А можно выбрать m способами, а другой объект В можно выбрать n способами, то выбор объекта либо А, либо В можно осуществить $m + n$ способами.	Если объект А можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора объект В можно выбрать n способами, то выбор пары А и В можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Пример: В магазине «Все для чая» есть 6 разных чашек и 4 разных блюда. Сколько вариантов чашки и блюда можно купить?

Решение: Чашку мы можем выбрать 6-ю способами, а блюдо 4-я способами. Так как нам надо купить пару чашку и блюдо, то это можно сделать $6 \cdot 4 = 24$ способами (по правилу произведения).

Ответ: 24.

Для успешного решения комбинаторных задач надо еще и правильно выбрать формулу, по которой искать количество нужных соединений. В этом поможет следующая схема.



Рассмотрим решение нескольких задач на разные виды соединений без повторений.

Пример: Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числе повторяться не могут.

Решение: Для выбора формулы выясняем, что для чисел, которые мы будем составлять, порядок учитывается и не все элементы одновременно выбираются. Значит, это

соединение – размещение из 7 элементов по 3. Воспользуемся формулой для числа размещений: $A_7^3 = 7(7-1)(7-2) = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ чисел.

Ответ: 210.

Пример: Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры разные, а номер не может начинаться с нуля?

Решение: На первый взгляд эта задача такая же, как и предыдущая, но сложность в том, что надо не учитывать те соединения, которые начинаются с нуля. Значит необходимо из существующих 10-ти цифр составить все семизначные номера телефонов, а потом от полученного числа отнять количество номеров, начинающихся с нуля. Формула будет иметь вид: $A_{10}^7 - A_9^6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 - 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 544\,320$.

Ответ: 544 320.

Пример: Сколькими способами можно расставить на полке 12 книг, из которых 5 книг – это сборники стихотворений, так, чтобы сборники стояли рядом?

Решение: Сначала примем 5 сборников условно за одну книгу, потому что они должны стоять рядом. Так как в соединении существенным есть порядок, и все элементы используются, значит это перестановки из 8 элементов (7 книг + условная 1 книга). Их количество P_8 . Далее будем переставлять между собой только сборники стихотворений. Это можно сделать P_5 способами. Поскольку нам нужно расставить и сборники, и другие книги, то воспользуемся правилом произведения. Следовательно, $P_8 \cdot P_5 = 8! \cdot 5!$. Число способов будет большим, поэтому ответ можно оставить в виде произведения факториалов.

Ответ: $8! \cdot 5!$

Пример: В классе 16 мальчиков и 12 девочек. Для уборки территории возле школы нужно 4 мальчика и 3 девочки. Сколькими способами можно их выбрать со всех учеников класса?

Решение: Сначала отдельно выберем 4 мальчика из 16 и 3 девочки из 12. Так как порядок размещения не учитывается, то соответственные соединения – сочетания без повторений. Учитывая необходимость одновременного выбора и мальчиков, и девочек, используем правило произведения. В результате число способов будет вычисляться таким образом:

$$C_{16}^4 \cdot C_{12}^3 = (16!/(4! \cdot 12!)) \cdot (12!/(3! \cdot 9!)) = ((13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16) / (2 \cdot 3 \cdot 4)) \cdot ((10 \cdot 11 \cdot 12) / (2 \cdot 3)) = 400\,400.$$

Ответ: 400 400.

Практическая работа № 24. Решение простейших комбинаторных задач

План работы:

1. Повторение теоретического материала, правил комбинаторики и формул.
2. Применение формул комбинаторики для нахождения значений выражений и решения задач.

1. Вычислить

1 вариант	$\frac{5! - 3!}{4!}$	$\frac{p_6 - p_2}{4!}$	$C_8^3 + 3!$
2 вариант	$\frac{4!}{3! + 6!}$	$\frac{A_{12}^5}{4!}$	$C_7^2 \cdot 5! + A_4^2$
3 вариант	$\frac{5! \cdot 3!}{6!}$	$A_{12}^5 \cdot p_5$	$6! - C_{10}^8$

2. Решить задачу.

1 Вариант

1. Сколько трехбуквенных слов можно образовать из букв слова «АРБУЗ»?
2. Сколько трехбуквенных слов можно образовать из букв слова «ПЕРСИК»?
3. В шахматном турнире участвуют 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?
4. Сколько существует вариантов рассаживания вокруг стола 6 гостей на 6 стульях?

2 Вариант

1. Сколько различных слов, даже бессмысленных можно образовать, представляя буквы «АРБУЗ»?
2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 2;3;4;5;6?
3. В хоровом кружке занимаются 9 человек. Необходимо выбрать двух солистов. Сколькими способами это можно сделать?
4. Сколькими способами 10 футбольных команд могут разыграть между собой золотые, бронзовые и серебряные медали?

3 Вариант

1. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 2;4;6;7;9?
2. Сколько различных слов, даже бессмысленных, можно образовать представляя буквы «ПЕРСИК» ?
3. В спортивной команде 9 человек. Необходимо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?
4. В магазине продаются блокноты 7 разных видов и ручки 4 разных видов. Сколькими разными способами можно выбрать покупку из одного блокнота и одной ручки?

Глава 8. Элементы теории вероятности

Теоретические сведения и методические рекомендации

Классическое определение вероятности

Определение: вероятность любого события определяется как отношение числа m благоприятных для события A элементарных исходов к общему числу элементарных исходов n .

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Определение. Под опытом понимается воспроизведение некоторого комплекса условий. При этом предполагается, что опыт может быть повторен сколько угодно раз.

Определение. Пусть имеется некоторый опыт. Событие, связанное с этим опытом, называется любой его исход.

При этом событие называется случайным, если оно может появиться или не появиться в данном опыте.

Пример: Некто, перетасовывая колоду из 36 карт, извлекает оттуда случайным образом одну карту. Какова вероятность того, что это будет туз?

Решение: Тузов всего 4. Это количество благоприятных исходов. Всего карт 36 - это количество всех исходов испытания. Искомая вероятность равна $4/36 = 1/9$

Пример: В конверте среди 25 карточек находится разыскиваемая карточка. Из конверта наудачу извлечено 6 карточек. Какова вероятность, что среди них окажется нужная карточка?

Решение: Извлечь 6 карточек из 25 можно C_{25}^6 способами. Это количество всех исходов. Подсчитаем количество благоприятных исходов. Если нужная карточка уже есть в наборе, то остальные пять карточек из 24 можно выбрать C_{24}^5 способами.

$$P(A) = \frac{C_{24}^5}{C_{25}^6} = \frac{\frac{24!}{5!19!}}{\frac{25!}{6!19!}} = \frac{24!6!}{5!25!} = \frac{6}{25} = 0,24$$

Вычисление вероятностей с помощью формул комбинаторики

Пример: В партии из $N = 10$ деталей имеется $L = 7$ стандартных.

Наудачу отобраны $k = 6$ деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно $r = 4$ стандартных.

Решение: Число n всех возможных элементарных исходов выбора равно числу способов, которыми можно извлечь k деталей из N деталей, т.е. $n = C_N^k$ - числу сочетаний из N элементов по k .

$$n = C_N^k = C_{10}^6 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

Подсчитаем число исходов, составляющих интересующее нас событие A – (среди k деталей ровно r стандартных). Из k стандартных деталей взять r стандартных деталей можно C_k^r способами, при этом остальные $k-r$ деталей должны быть нестандартными; взять их из $N-L$ нестандартных деталей можно C_{N-L}^{k-r} способами. Число m всех благоприятствующих A исходов равно произведению $m = C_k^r \cdot C_{N-L}^{k-r}$.

$$m = C_k^r \cdot C_{N-L}^{k-r} = C_7^4 \cdot C_3^2 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 105.$$

Вероятность события A равна отношению m – числа исходов, благоприятствующих событию A , к n – числу всех возможных элементарных исходов

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_k^r \cdot C_{N-L}^{k-r}}{C_N^k} = \frac{105}{210} = 0,5.$$

Вычисление вероятностей независимых событий

Пример: Для сообщения об аварии установлены два *независимо* работающих автомата – сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна $p_1 = 0,95$, второй – $p_2 = 0,9$. Найти вероятность события A – при аварии поступит сигнал хотя бы от одного сигнализатора.

Решение: Событие A может осуществиться, если произойдет одно из следующих событий: сработает первый сигнализатор и одновременно не сработает второй – $A_1 \bar{A}_2$; сработает второй сигнализатор и одновременно не сработает первый – $\bar{A}_1 A_2$; одновременно сработают оба сигнализатора – $A_1 A_2$, т.е. $A = A_1 \bar{A}_2 + \bar{A}_1 A_2 + A_1 A_2$. Вероятности противоположных событий $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ соответственно равны $q_1 = 1 - p_1 = 0,05$ и $q_2 = 1 - p_2 = 0,1$. События, составляющие A , несовместны (не могут произойти одновременно), поэтому вероятность события A равна

$$P(A) = P(A_1 \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 A_2) + P(A_1 A_2) = p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_2 = 0,995.$$

2-й способ: Событие $\bar{A}$ противоположное A произойдет, если одновременно не сработают оба сигнализатора – $\bar{A}_1 \bar{A}_2$. Тогда вероятность события A равна

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = 1 - q_1 \cdot q_2 = 1 - 0,005 = 0,995$$

Практическая работа № 25. Решение задач на вычисление классической вероятности

Практические задания:

1. Шесть шаров случайным образом раскладывают в три ящика. Найти вероятность того, что во всех ящиках окажется разное число шаров, при условии, что все ящики не пустые.

2. На шахматную доску случайным образом поставлены две ладьи. Какова вероятность, что они не будут бить одна другую?

3. Шесть рукописей случайно раскладывают по пяти папкам. Какова вероятность того, что ровно одна папка останется пустой?

4. Ребенок имеет на руках 5 кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Какова вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла"?

Практическая работа № 26. Решение задач вероятностными методами

Решение задач.

1 Вариант

1. Из 100 изготовленных пальто оказалось 7 третьего сорта, а остальные пальто первого и второго сорта. Какова вероятность, что пять отобранных пальто будут первого или второго сорта.

2. Из урны, в которой 30 шаров белых и 4 красных, наудачу вынимаются 3 шара. Найти вероятность того, что среди них есть хотя бы один красный шар.

3. Из полного набора костей домино наугад берут 3 кости. Какова вероятность того, что хотя бы две из них дубли?

4. В урне 6 белых и 5 красных шаров. Наугад последовательно без возврата вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара красные.

5. Партия из 100 изделий содержит 40 изделий 1-го сорта, а остальные второго сорта. Наудачу берут 4 изделия, найти вероятность того, что все они будут одного сорта.

2 Вариант

1. Студент знает 30 из 40 вопросов программы. Каждый билет содержит два вопроса программы. Найти вероятность того, что студент знает оба вопроса билета.

2. В партии из 10 приборов 8 не имеют дефекта. Найти вероятность того, что из двух наудачу взятых приборов хотя бы один без дефекта.

3. Открываются одна за другой карты колоды из 36 штук. Какова вероятность того, что первой картой пиковой масти окажется пятая карта?

4. Среди 17 студентов группы, из которых восемь девушек, разыгрывается семь билетов, причем каждый может выиграть, только один билет. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся четыре девушки?

5. Найти вероятность того, что в 4-х значном номере наудачу взятой машины: а) все цифры различны, б) все цифры одинаковы.

Практическая работа № 27. Вычисление вероятностей независимых событий

Решение задач на вычисление вероятностей независимых событий.

1 Вариант

1. Трое охотников одновременно выстрелили в зайца. Найти вероятность того, что заяц будет убит, если каждый из охотников убивает зайца с вероятностью 0,5; 0,7 и 0,9 соответственно.

2. В электрической цепи 3 элемента, которые выходят из строя независимо друг от друга с вероятностями 0,3; 0,2 и 0,1. Определить вероятность разрыва цепи при параллельном соединении элементов.

3. Вероятность наличия нужного материала на 1-й базе равна 0,9, на 2-й – 0,95, на 3-й – 0,8, на 4-й – 0,6. Найти вероятность того, что только на одной базе окажется нужный материал.

4. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,3, второй – 0,4, третий – 0,7. Найти вероятность того, что в течение часа только один станок не потребует внимания рабочего.

5. В электрической цепи 3 элемента, которые выходят из строя независимо друг от друга с вероятностями 0,3; 0,2 и 0,1. Определить вероятность разрыва цепи при последовательном соединении этих элементов.

2 Вариант

1. Два студента ищут нужную книгу в магазинах. Вероятность того, что книга будет найдена первым студентом, равна 0,6, а вторым – 0,7. Найти вероятность того, что только один студент найдет книгу.

2. Два стрелка делают по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятность попадания в нее первым стрелком 0,7, а вторым равна 0,6. Найти вероятность того, что а) мишень будет поражена; б) только одно попадание в цель.

3. Вероятность наличия нужного материала на 1-й базе равна 0,9, на 2-й – 0,95, на 3-й – 0,8, на 4-й – 0,6. Найти вероятность того, что только на одной базе не окажется нужного материала.

4. Вероятность безотказной работы блока, входящего в систему, составляет 0,8. Для повышения надежности устанавливают такой же резервный блок. Найти вероятность безотказной работы блока.

5. Три спортсмена участвуют в отборочных соревнованиях. Вероятности зачисления в сборную команду первого, второго и третьего спортсмена соответственно равны 0,8; 0,7; 0,6. Найти вероятность того, что хотя бы один из этих спортсменов войдет в сборную.

Глава 9. Тригонометрические формулы

Тригонометрические функции, их свойства и графики.

Практическая работа № 28. Построение и преобразование графиков тригонометрических функций

План работы:

1. Повторить свойства и графики тригонометрических функций.
2. Построение графиков с помощью преобразований.

I вариант	II вариант
1. Контрольные вопросы	
а) свойства тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$; б) свойства тригонометрических функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$; в) что такое нули функции?	
2. Построить графики функций:	
1) $y = \sin x + 1$; 2) $y = 2 \cos x$; 3) $y = \left \frac{1}{2} \sin x \right $; 4) $y = \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$; 5) $y = \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$;	1) $y = \cos x - 1$; 2) $y = \frac{1}{2} \sin x$; 3) $y = 2 \cos x $; 4) $y = \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$; 5) $y = \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$.

Практическая работа № 29. Основы тригонометрии

План работы:

1. Повторить свойства и формулы тригонометрических функций.
2. Упрощение выражений и вычисление их значений.

1 Вариант

1. Выразите в радианной мере величины углов 64° ; 160° .
2. Выразите в градусной мере величины углов $\frac{3\pi}{5}$, $1\frac{3}{4}\pi$.
3. Укажите знак числа: а) $\sin \frac{4\pi}{5} \operatorname{tg} \frac{\pi}{7}$; б) $\sin 3 \cdot \cos 4$.
4. Дано: $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Найдите $\cos \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$.

2 Вариант

1. Выразите в радианной мере величины углов 56° ; 170° .
2. Выразите в градусной мере величины углов $\frac{5\pi}{6}$, $2\frac{1}{6}\pi$.
3. Укажите знак числа: а) $\cos \frac{3\pi}{5} \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}$; б) $\sin 4 \cdot \cos 5$.
4. Дано: $\cos \alpha = -\frac{24}{25}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Найдите $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$.

3 Вариант

1. Выразите в радианной мере величины углов 72° ; 140° .
2. Выразите в градусной мере величины углов $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{23}{8}\pi$.

3. Укажите знак числа: а) $\frac{\cos 200^0 \cdot \operatorname{tg} 300^0}{\sin 400^0}$; б) $\cos 2 \cdot \operatorname{tg} 4$.

4. Найдите $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что $\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ и α не лежит во второй четверти.

четверти.

Практическая работа № 30. Применение формул приведения для упрощения выражений

План работы:

1. Повторить основные формулы тригонометрии, формулы приведения.
2. Упрощение выражений и вычисление их значений.

1 Вариант

1. Упростить выражение: $(\sin 160^0 + \sin 40^0)(\sin 140^0 + \sin 20^0) + (\sin 50^0 - \sin 70^0)(\sin 130^0 - \sin 110^0)$.
2. Упростите выражение: $\operatorname{ctg}^2 \alpha (1 - \cos 2\alpha)^2 + \cos^2 2\alpha$.
3. Докажите тождество: $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) \left(1 + \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha \right) \right) = \operatorname{tg}(2\pi - \alpha) - \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right)$.

2 Вариант

1. Упростить выражение: $(\cos 70^0 + \cos 50^0)(\cos 310^0 + \cos 290^0) + (\cos 40^0 + \cos 160^0)(\cos 320^0 - \cos 380^0)$.
2. Упростите выражение: $\cos^2 \alpha (1 + \cos 2\alpha)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$.
3. Докажите тождество: $\frac{\sin(\alpha + \pi)}{\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)} + \frac{\cos(3\pi - \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - 1} = \frac{1}{\cos \alpha}$.

3 Вариант

1. Упростить выражение: $(\sin 130^0 - \sin 110^0)(\sin 50^0 - \sin 70^0) + (\sin 160^0 + \sin 40^0)(\sin 140^0 + \sin 20^0)$.
2. Упростите выражение: $\frac{1 + \operatorname{ctg} 2\alpha \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}$.
3. Докажите тождество: $\frac{\sin(-\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

Практическая работа № 31. Формулы суммы и разности тригонометрических функций. Тригонометрические преобразования

План работы:

1. Повторить основные формулы тригонометрии, формулы приведения.
2. Упрощение выражений и вычисление их значений.

1 Вариант

1. Упростите выражение: $\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \operatorname{ctg}^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$.
2. Упростите выражение: $\operatorname{ctg}^2 \alpha (1 - \cos 2\alpha)^2 - \cos^2 2\alpha$.
3. Вычислить $\frac{\cos 68^0 \cos 8^0 - \cos 82^0 \cos 22^0}{\cos 53^0 \cos 23^0 - \cos 67^0 \cos 37^0}$.
4. Вычислите $\sin 20^0 \cos 50^0 \sin 60^0 \cos 10^0$.
5. Преобразовать в произведение $\frac{1}{\sqrt{3}} \sin 4\alpha + 1 - 2 \cos^2 2\alpha$.

Дополнительное задание:

1. Дано: $\sin x - \cos x = n$. Найдите $\sin 2x$ и наименьшее значение n .
2. Начертите график функции $y = x \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x - 1$.

2 Вариант

1. Вычислите $\sin 105^0 \cdot \cos 15^0 + \sin 15^0 \cdot \sin 165^0 + \operatorname{tg} 225^0$.

2. Вычислите $\frac{1 - \sin^2 15^0}{2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1}$.

3. Вычислите $\frac{\cos 70^0 \cos 10^0 + \cos 80^0 \cos 20^0}{\cos 69^0 \cos 9^0 + \cos 81^0 \cos 21^0}$.

4. Вычислите $\sin 20^0 \sin 40^0 \sin 60^0 \sin 80^0$.

5. Преобразовать в произведение $6 \sin^2 2\alpha - 1 - \cos 4\alpha$.

Дополнительное задание:

Дано: $\sin x + \cos x = m$. Найдите $\sin 2x$ и наибольшее значение m .

Начертите график функции $y = 2^{\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x} - 4$.

Глава 10. Тригонометрические уравнения

Теоретические сведения и методические рекомендации

Решение простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Общее решение	Частные случаи		
		$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$
$\sin x = a$, $ a \leq 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$
$\cos x = a$, $ a \leq 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n$	$x = \pi + 2\pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = 2\pi n$
$\operatorname{tg} x = a$, $a \in (-\infty; \infty)$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$	$x = \pi n$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$
$\operatorname{ctg} x = a$, $a \in (-\infty; \infty)$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$

Методы решения тригонометрических уравнений

Решение тригонометрического уравнения состоит из двух этапов: преобразование уравнения для получения его простейшего вида и решение полученного простейшего тригонометрического уравнения.

1. Алгебраический метод.

Пример. Решить уравнение: $2 \cos^2(x + \pi/6) - 3 \sin(\pi/3 - x) + 1 = 0$.

Решение. Используя формулы приведения, имеем:

$$2 \cos^2(x + \pi/6) - 3 \cos(x + \pi/6) + 1 = 0,$$

делаем замену: $\cos(x + \pi/6) = y$, тогда $2y^2 - 3y + 1 = 0$,

находим корни: $y_1 = 1$, $y_2 = 1/2$, откуда следуют два случая:

$$1). \cos(x + \pi/6) = 1, \quad 2). \cos(x + \pi/6) = 1/2,$$

$$x + \pi/6 = 2\pi k, \quad x + \pi/6 = \pm \arccos(1/2) + 2\pi k,$$

$$x_1 = -\pi/6 + 2\pi k; \quad x_2 = \pm \pi/3 - \pi/6 + 2\pi k.$$

2. Приведение к однородному уравнению.

Алгоритм решения однородных уравнений:

а) перенести все его члены в левую часть;

б) вынести все общие множители за скобки;

- в) приравнять все множители и скобки нулю;
 г) скобки, приравненные нулю, дают однородное уравнение меньшей степени, которое следует разделить на $\cos x$ (или $\sin x$) старшей степени;
 д) решить полученное алгебраическое уравнение относительно $\tan x$.

Пример: Решить уравнение: $3\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2$.

Решение: $3\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$,

$$\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x + 3 = 0, \text{ откуда } y^2 + 4y + 3 = 0,$$

корни этого уравнения: $y_1 = -1$, $y_2 = -3$, откуда

$$1) \operatorname{tg} x = -1, \quad 2) \operatorname{tg} x = -3,$$

$$x_1 = -\pi/4 + \pi k; \quad x_2 = -\arctan 3 + \pi n.$$

Практическая работа № 32. Решение простейших тригонометрических уравнений

План работы:

- Повторить формулы решения простейших тригонометрических уравнений.
- Решение простейших тригонометрических уравнений.

I вариант	II вариант
1. Решите уравнение:	
1. $\sin x - \frac{1}{2} = 0$;	1. $\cos x - \frac{1}{2} = 0$;
2. $2\cos x - \sqrt{3} = 0$;	2. $2\sin x - \sqrt{3} = 0$;
3. $2\cos x - 1 = 0$;	3. $2\sin x - 1 = 0$;
4. $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$;	4. $\sqrt{3}\operatorname{ctg} x + 1 = 0$;
5. $\operatorname{ctg} 3x = 1$;	5. $\operatorname{tg} 2x = 1$;
6. $\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$;	6. $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
7. $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$;	7. $\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Практическая работа № 33. Решение тригонометрических уравнений

План работы:

- Повторить методы решения тригонометрических уравнений.
- Закрепить методы решения тригонометрических уравнений.

I вариант	II вариант
1. Решить уравнение, сделав подстановку:	
1) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$;	5) $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0$;
2) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$;	6) $4 + 5\cos x - 2\sin^2 x = 0$;
3) $\cos 2x + 5\sin x - 3 = 0$;	7) $\cos 2x + 5\cos x = 0$;
4) $2\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x = 5$;	8) $3\operatorname{tg} x - 3\operatorname{ctg} x = 8$.
2. Решить уравнение методом разложения на множители:	
1) $5\sin x + 3\sin 2x = 0$;	3) $7\cos x - 4\sin 2x = 0$;
2) $\sin 7x - \sin x = 0$;	4) $\cos 5x + \cos x = 0$.
3. Решите уравнение, упростив левую часть:	
1) $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;	4) $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
2) $2\sin^2 x \cos 2x = 1$;	5) $\sin 3x \cdot \cos 3x = -\frac{1}{2}$;
3)	6)

$\sin 3x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 3x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0;$	$\sin 2x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos 2x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$
4. Решите однородное уравнение:	
1) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0;$ 2) $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0;$ 3) $\sin x \cdot \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0;$	4) $\sin x - \cos x = 0;$ 5) $3 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0;$ 6) $\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 0.$

Глава 11. Многогранники

Практическая работа № 34. Пространственные фигуры. Многогранники

План работы:

1. Повторение теоретического материала.
2. Письменные ответы на теоретические вопросы.
3. Выполнение чертежей, решение задач.

I вариант	II вариант
1. Закончите утверждение	
1. Ребрами многогранника называются ... 2. Диагоналями многогранника называются ... 3. Параллелепипед – многогранник, у которого ... 4. Пирамида – многогранник, у которого ... 5. Правильная призма – призма, у которой ...	1. Граниями многогранника называются ... 2. Вершинами многогранника называются ... 3. Куб – многогранник, у которого ... 4. Прямая призма – призма, у которой ... 5. Правильная пирамида – пирамида, у которой ...
2. Решить задачу:	
1) Диагональ куба равна $2\sqrt{3}$. Определить полную поверхность куба. 2) Дана четырехугольная пирамида, основание которой – прямоугольник со сторонами 15 и 20 м. Боковые ребра равны 25 м. Найти высоту пирамиды. 3) Найти диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны: а) 3 дм, 4 дм, 2 дм; б) 5 м, 7 м, 8 м; в) 30 см, 20 см, 120 см.	1) Дана правильная треугольная пирамида. Ее боковая поверхность равна 144 см^2 , апофема – 6 см. Найти сторону основания. 2) В правильной четырехугольной призме площадь основания равна $S=144 \text{ см}^2$, а высота $h=14$ см. Найти диагональ призмы. 3) Найти диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны: а) 2 дм, 6 дм, 4 дм; б) 3 м, 9 м, 10 м; в) 40 см, 70 см, 110 см.

Практическая работа № 35. Нахождение площади параллелепипеда и прямой призмы

План работы:

1. Повторить формулы нахождения площади поверхности прямой призмы и параллелепипеда.
2. Выполнение вычислений, заполнение таблицы.
3. Выполнение чертежей, решение задач.

Основание прямой призмы	Высота	Сбок.	Сполн.
Треугольник ABC, AC=15см, BC=20см, $\angle C = 90^\circ$	12см		
Параллелограмм ABCK, AB=3, AK=4, $\angle A = 30^\circ$	8см		
Прямоугольник, стороны которого 14см и 5дм.	9см		
Трапеция ABCK, AB=7см, AK=3см, $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$	8см		

Дополнительное задание:**1 Вариант**

Стороны основания прямого параллелепипеда 6см и 4см, угол между ними 45° . Диагональ большей боковой грани 10см. Найдите площадь боковой и площадь полной поверхности параллелепипеда.

2 Вариант

В основании прямого параллелепипеда лежит ромб со стороной 12см и углом 60° . Меньшая диагональ параллелепипеда 13см. Найдите площадь боковой и площадь полной поверхности параллелепипеда.

Практическая работа № 36. Нахождение площади полной и боковой поверхности пирамиды**План работы:**

1. Повторить формулы нахождения площади полной и боковой поверхности пирамиды.
2. Выполнение чертежей, решение задач.

1 Вариант

1. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол 45° . Найдите площадь боковой и площадь полной поверхности пирамиды, если сторона основания равна p .

2. Высота правильной треугольной пирамиды равна $a\sqrt{3}$, радиус окружности, описанной около её основания, $2a$.

Найдите:

- а) апофему пирамиды.
- б) угол между боковой гранью и основанием.
- в) площадь боковой поверхности пирамиды.
- г) плоский угол при вершине пирамиды.

2 Вариант

1. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды составляет с высотой угол 45° . Найдите площадь боковой и площадь полной поверхности пирамиды, если сторона основания равна p .

2. Апофема правильной четырёхугольной пирамиды равна $2a$, высота пирамиды равна $a\sqrt{2}$.

Найдите:

- а) Сторону основания пирамиды.
- б) Угол между боковой гранью и основанием.
- в) Площадь поверхности пирамиды.
- г) Расстояние от центра основания пирамиды до плоскости боковой грани.

Практическая работа № 37. Нахождение площадей многогранников**План работы:**

1. Повторить формулы площадей многогранников.
3. Выполнение чертежей, решение задач.

1 Вариант

1. Найдите площадь полной поверхности куба, если расстояние от вершины верхнего основания куба до центра нижнего основания равно p .

2. Основание прямой призмы – треугольник со сторонами 8см и 15см и углом между ними 60° . Высота призмы 11см. Найдите площадь боковой и площадь полной поверхности призмы.

3. Найдите площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, если двугранный угол при стороне основания равен 30° , а радиус окружности, описанной около основания, равен 2см.

2 Вариант

1. Найдите площадь полной поверхности правильного тетраэдра, высота которого равна p .
2. Основание прямой призмы – треугольник со сторонами 8см и 3см и углом между ними 60° . Высота призмы 15см. Найдите площадь боковой и площадь полной поверхности призмы.
3. Найдите площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, если её апофема 4см, а угол между апофемой и высотой пирамиды равен 30° .

Глава 12. Векторы в пространстве

Практическая работа № 39. Коллинеарные и компланарные векторы

План работы:

1. Повторение теоретического материала.
2. Письменные ответы на теоретические вопросы.
3. Выполнение чертежей, решение задач.
4. Решение дополнительного задания (более сложного)

1 Вариант

1. Нулевым вектором называется ...
2. Два вектора называются коллинеарными, если ...
3. В кубе $A...D_1$ векторы ... и ... коллинеарны.
4. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то любой вектор $\vec{c}$, компланарный с ними, можно записать в виде ...
5. В параллелепипеде $A...D_1$ векторы ... и ... компланарны.

Дополнительные задания:

1. На какое число нужно умножить ненулевой вектор $\vec{a}$, чтобы получить вектор $\vec{b}$, одинаково направленный с $\vec{a}$ и $|\vec{b}|=1$.
2. Даны два противоположно направленных вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$, причем $|\vec{m}| > |\vec{n}|$. Найдите направление и длину вектора $\vec{m} + \vec{n}$.
3. Дан тетраэдр $ABCD$. Запишите три пары его вершин, задающие компланарные векторы.
4. Дан куб $A...D_1$. Запишите тройки некомпланарных векторов с началами и концами в его вершинах.

2 Вариант

1. Два вектора считаются равными, если ...
2. Если вектор $\vec{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$, то ...
3. В параллелепипеде $A...D_1$ векторы ... и ... коллинеарны.
4. Три ненулевых вектора называются компланарными, если ...
5. В кубе $A...D_1$ векторы ... и ... компланарны.

Дополнительные задания:

1. На какое число нужно умножить ненулевой вектор $\vec{c}$, чтобы получить вектор $\vec{d}$, противоположно направленный с $\vec{c}$ и $|\vec{d}|=2$.
2. Даны два противоположно направленных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем $|\vec{a}| < |\vec{b}|$. Найдите направление и длину вектора $\vec{a} + \vec{b}$.
3. Дан тетраэдр $ABCD$. Запишите три пары его вершин, задающие некомпланарные векторы.
4. Дан куб $A...D_1$. Запишите тройки компланарных векторов с началами и концами в его вершинах.

Практическая работа № 40. Действия над векторами. Построение

План работы:

1. Повторение правил сложения, вычитания и умножения вектора на число.
2. Построение векторов, используя правила и свойства.
3. Выполнение чертежей, решение задач.

1 Вариант

1. Для данного вектора $\vec{m}$ постройте векторы: а) $-\vec{m}$; б) $2\vec{m}$; в) $-\frac{1}{3}\vec{m}$.
2. Сколько векторов задают всевозможные пары точек, составленные из вершин правильной четырехугольной пирамиды?
3. Изобразите правильный тетраэдр $ABCD$ и нарисуйте вектор: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}$; в) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.
4. Дан параллелепипед $A...D_1$. Найдите сумму векторов: а) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C_1D_1} - \overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A_1C_1}$.

2 Вариант

1. Для данного вектора $\vec{n}$ постройте векторы: а) $3\vec{n}$; б) $-2\vec{n}$; в) $\frac{1}{5}\vec{n}$.
2. Сколько векторов задают всевозможные пары точек, составленные из вершин треугольной призмы?
3. Изобразите правильный тетраэдр $ABCD$ и нарисуйте вектор: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$.
4. Дан параллелепипед $A...D_1$. Найдите сумму векторов: а) $\overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{B_1B} - \overrightarrow{B_1A_1}$; в) $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{C_1A_1}$.

Практическая работа № 41. Вычисление координат вектора, длина вектора

План работы:

1. Повторение формул для нахождения длины вектора, координат вектора, середины отрезка.
2. Выполнение практических заданий, решение задач.

1 Вариант

1. Найдите координаты вектора: а) $2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$; б) $-5\vec{i} + 10\vec{k}$; в) $-\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$.
2. Найдите длину вектора: а) $\vec{a}(1, -2, 10)$; б) $\overrightarrow{AB}$, если $A(0, -5, 1)$, $B(2, 0, -8)$; в) $\vec{m} + \vec{n}$, если $\vec{m}(6, 2, -6)$, $\vec{n}(2, -2, 0)$.
3. Найдите координаты точки C , если: а) $\overrightarrow{CD}(-5, 6, 8)$, $D(0, -1, 2)$; б) $D(-13, 0, 5, 6)$, $\overrightarrow{DC}(-5, 0, 0)$.
4. Найдите числа x, y, z , чтобы выполнялось равенство $\vec{f} = x\vec{c} + y\vec{d} + z\vec{e}$, если $\vec{f}(5, -2, 0)$, $\vec{c}(0, 2, -6)$, $\vec{d}(-5, 0, -8)$, $\vec{e}(-5, 2, -4)$.
5. Даны $\vec{a}\{2; -4; 3\}$, $\vec{b}\{-3; 0; 5; 1\}$. Найдите координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.
6. Даны $\vec{a}\{1; -2; 0\}$; $\vec{b}\{3; -6; 0\}$; $\vec{c}\{0; -3; 4\}$. Найдите координаты вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}$.
7. Найдите значения m и n , при которых векторы $\vec{a}\{6; n; 1\}$ и $\vec{b}\{m; 16; 2\}$ коллинеарны.

2 Вариант

1. Найдите координаты вектора: а) $3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$; б) $-2\vec{i} - \vec{k}$; в) $\vec{j} - 0,5\vec{k}$.
2. Найдите длину вектора: а) $\vec{b}(0, -3, 2)$; б) $\overrightarrow{MN}$, если $M(0, -5, 1)$, $N(2, 0, -8)$; в) $\vec{c} - \vec{d}$, если $\vec{c}(0, -2, 6)$, $\vec{d}(-5, 0, 3)$.

3. Найдите координаты точки E , если: а) $\overrightarrow{EF}(0,-3,11)$, $F(5,-1,0)$; б) $F(5,0,-9)$, $\overrightarrow{FE}(-2,4,-6)$.
4. Найдите числа u , v , w , чтобы выполнялось равенство $\vec{n} = u\vec{k} + v\vec{l} + w\vec{m}$, если $\vec{n}(-30,6,-12)$, $\vec{k}(5,-6,0)$, $\vec{l}(10,-3,2)$, $\vec{m}(0,1,2)$.
5. Даны $\vec{a}\{1;-3;-1\}$, $\vec{e}\{-1;2;0\}$. Найдите координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - \vec{e}$.
6. Даны $\vec{a}\{2;4;-6\}$, $\vec{e}\{-3;1;0\}$; $\vec{c}\{3;0;-1\}$. Найдите координаты вектора $\vec{p} = -0,5\vec{a} + 2\vec{e} - \vec{c}$.
7. Найдите значения m и n , при которых векторы $\vec{a}\{-4;m;2\}$ и $\vec{e}\{2;-6;n\}$ коллинеарны.

Практическая работа № 42. Скалярное произведение векторов

План работы:

1. Повторение определения скалярного произведения векторов.
2. Показать практическое применение полученных знаний - нахождение угла между векторами.
3. Выполнение практических заданий, решение задач.

1 Вариант

1. Определите знак скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если угол φ между ними удовлетворяет неравенствам: а) $0^\circ < \alpha < 90^\circ$; б) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.
2. Угол между векторами $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{CD}$ равен 90° . Чему равен угол между векторами: а) $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{CD}$; б) $-\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$?
3. Докажите равенство: а) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$; б) $\vec{a}(\vec{b} - \vec{c}) + \vec{b}(\vec{c} - \vec{a}) + \vec{c}(\vec{a} - \vec{b}) = 0$
4. В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром, равным 1, найдите скалярное произведение: а) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{HQ} \cdot \overrightarrow{QC}$, где H и Q – середины соответственно ребер AC и BD .
5. Угол между векторами $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{KL}$ равен 90° . Чему равен угол между векторами: а) $\overrightarrow{MN}$ и $-\overrightarrow{KL}$; б) $-\overrightarrow{MN}$ и $-\overrightarrow{KL}$?
6. Вычислите угол между прямыми AB и CD , если $A(\sqrt{3};1;0)$; $B(0;0;2\sqrt{2})$; $C(0;2;0)$; $D(\sqrt{3};1;2\sqrt{2})$

2 Вариант

1. Определите, в каком промежутке находится угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: а) $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$; б) $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$.
3. Докажите равенство: а) $\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})$; б) $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$.
4. В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром, равным a , найдите скалярное произведение: а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{FE}$, где E и F – середины соответственно ребер BC и AD .
5. Ребро куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ равно 2. Вычислите скалярное произведение векторов а) $\overrightarrow{DA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1}$; $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{BC_1}$ б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC_1}$; $\overrightarrow{D_1A}$ и $\overrightarrow{CC_1}$.
6. Вычислите угол между прямыми AB и CD , если $A(6;-4;8)$; $B(8;-2;4)$; $C(12;-6;4)$; $D(14;-6;2)$

Глава 13. Тела и поверхности вращения

Практическая работа № 43. Цилиндр. Конус. Определение, элементы фигур

План работы:

1. Повторение теоретического материала.
2. Письменные ответы на теоретические вопросы.

1 Вариант

1. Цилиндром называется ...
2. Основаниями цилиндра являются ...
3. Образующими цилиндра называются ...
4. Осью цилиндра называется ...
5. Цилиндр имеет ... осевых сечений.
6. Конус получается следующим образом ...
7. Высотой конуса называется ...
8. Боковой поверхностью конуса называется ...
9. Усеченным конусом называется ...
10. Высотой усеченного конуса называется ...

Вариант 2

1. Цилиндр получается следующим образом ...
2. Высотой цилиндра называется ...
3. Боковой поверхностью цилиндра называется ...
4. Осевым сечением цилиндра называется ...
5. Цилиндр имеет ... образующих.
6. Конусом называется ...
7. Вершиной конуса называется ...
8. Образующими конуса называются ...
9. Наклонным конусом называется ...
10. Высотой наклонного конуса называется ...

Практическая работа № 44. Цилиндр. Конус. Решение задач

План работы:

1. Повторить знания о телах вращения – цилиндр, конус. Определение, элементы цилиндра, конуса, сечение цилиндра, конуса, формулы площади боковой и полной поверхности.
2. Выполнение чертежей к задачам. Решение задач.

1 Вариант

1. В цилиндре, радиус основания которого равен 4 см и высота 6 см, проведено сечение, параллельное оси. Расстояние между диагональю сечения и осью цилиндра равно 2 см. Найдите площадь сечения.
2. Через вершину конуса проведено сечение под углом 60° к его основанию. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения, если высота конуса равна 12 см.
3. Точка M принадлежит высоте конуса. Точка N принадлежит плоскости основания конуса, но находится вне этого основания. Постройте точку пересечения прямой MN с поверхностью конуса.
4. Диагонали осевого сечения усеченного конуса перпендикулярны, высота равна 2 см. Найдите площадь сечения усеченного конуса, проведенного через середину высоты параллельно основаниям.

2 Вариант

1. Высота цилиндра равна 15 см, радиус основания 10 см. Дан отрезок, концы которого принадлежат окружностям обоих оснований и длина которого равна $3\sqrt{41}$ см. Найдите расстояние между данным отрезком и осью цилиндра.
2. Через вершину конуса проведено сечение под углом 30° к его высоте. Найдите площадь сечения, если высота конуса равна $3\sqrt{3}$ см, а радиус основания 5 см.

3. В конусе задано осевое сечение. Точки K и L принадлежат двум образующим конуса, не лежащим в данном сечении. Постройте точку пересечения прямой KL с плоскостью данного осевого сечения.

4. Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 1:3, образующая составляет с плоскостью основания угол 45° , высота равна h . Найдите площади оснований.

Практическая работа № 45. Нахождение площади поверхности цилиндра

План работы:

1. Повторить формулу площади поверхности цилиндра, его элементы.
2. Выполнение чертежей к задачам. Решение задач.
3. Заполнение таблицы.
4. Решение дополнительных заданий.

1. Сделайте вычисления и заполните таблицу.

В цилиндре r – радиус основания, h – высота. Найдите x и y и заполните таблицу.

Задание	r	h	$S_{\text{бок.}}$	$S_{\text{цил.}}$
1	1 см	2 см		
2	2 см	1 см		
3	25 м	10,5 м		
4	$\sqrt{3}$ см	7 см		
5			28см^2	40см^2
6	x	a	y	$2y$
7	$\frac{x}{2}$	x	28см^2	
8	$\frac{x}{2}$	x		$12\pi\text{ м}^2$

Дополнительные задания:

1 Вариант

1. Через образующую цилиндра проведено два сечения, из которых одно осевое, с площадью 10. Угол между сечениями равен 30° . Найдите площадь второго сечения.

2. В правильную треугольную призму вписан цилиндр. Найдите площадь его поверхности, если сторона основания призмы равна $2\sqrt{3}$, а высота равна 3.

3. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 10, боковые грани наклонены к основанию под углом 60° . В эту пирамиду вписан цилиндр, одно основание которого лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания касается боковой поверхности пирамиды. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если радиус основания равен 2.

2 Вариант

1. Через образующую цилиндра проведено два сечения, из которых одно осевое, с площадью 16. Угол между сечениями равен 60° . Найдите площадь второго сечения.

2. Вокруг правильной треугольной призмы описан цилиндр. Найдите площадь поверхности цилиндра, если высота призмы равна 4, а высота основания призмы равна 6.

3. В правильную треугольную пирамиду вписан цилиндр, нижнее основание которого лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания касается боковой поверхности пирамиды. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если сторона основания пирамиды равна $8\sqrt{3}$, а высота цилиндра 2. Боковые грани пирамиды составляют с плоскостью основания углы 45° .

Практическая работа № 46. Нахождение площади поверхности конуса

План работы:

1. Повторить формулу площади поверхности конуса, его элементы.

2. Выполнение чертежей к задачам. Решение задач.
3. Заполнение таблицы.
4. Решение дополнительных заданий.

1. Сделайте вычисления и заполните таблицу.

В цилиндре r – радиус основания, h – высота, l – образующая. Найти x и заполнить таблицу.

задание	r	h	l	$S_{\text{бок.}}$	$S_{\text{кон.}}$
1	1 см		2 см		
2	12 см	5 см			
3		3 м	5 м		
4	x	x		$36\sqrt{2}\pi \text{ см}^2$	
5	$\frac{x}{2}$	a	x		
6			27 см		$810\pi \text{ см}^2$

Дополнительные задания:

1 Вариант

1. Развёртка боковой поверхности цилиндра является квадратом, диагональ которого равна 10 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

2. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в 120° . Высота цилиндра равна 5 см, радиус цилиндра - $2\sqrt{3}$ см. Найдите площадь сечения.

2 Вариант

1. Развёртка боковой поверхности цилиндра является прямоугольником, диагональ которого равна 8 см, а угол между диагоналями - 30° . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

2. Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, есть квадрат. Эта плоскость отсекает от окружности основания дугу в 90° . Радиус цилиндра равен 4 см. Найдите площадь сечения.

Практическая работа № 47. Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости

логических и графических умений.

План работы:

1. Повторение теоретического материала.
2. Письменные ответы на теоретические вопросы.
3. Выполнение чертежей и решение задач.

1 Вариант

1. Ответьте на вопросы:

1. Сферой с центром в точке O и радиусом R называется ...
2. Большим кругом называется ...
3. Сфера и плоскость не пересекаются, если ...
4. Плоскость называется касательной к сфере, если ...
5. Ортогональной проекцией шара является ...

2. Решите задачи

1. Шар, радиус которого равен 10 см, пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 см от центра. Найдите площадь сечения.

2. Сечения шара радиуса R двумя параллельными плоскостями имеют радиусы r_1 и r_2 . Найдите расстояние между этими плоскостями, если они расположены по разные стороны от центра.

3. Стороны треугольника касаются сферы. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если радиус сферы равен 5 см, а стороны треугольника равны 12 см, 10 см, 10 см.

4. Каждая сторона ромба касается сферы радиуса 10 см. Плоскость ромба удалена от центра сферы на 8 см. Найдите площадь ромба, если его сторона равна 12,5 см.

2 Вариант

1. Ответьте на вопросы:

1. Шаром с центром в точке O и радиусом R называется ...
2. Большой окружностью называется ...
3. Сфера и плоскость пересекаются, если ...
4. Плоскость и сфера касаются, если ...
5. Сечением шара плоскостью является ...

2. Решите задачи

1. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярно к нему плоскость. Как относится площадь большого круга данного шара к площади получившегося сечения?
2. Сечения шара радиуса R двумя параллельными плоскостями имеют радиусы r_1 и r_2 . Найдите расстояние между этими плоскостями, если они расположены по одну сторону от центра.
3. Стороны ромба касаются сферы радиуса 13 см. Найдите расстояние от плоскости ромба до центра сферы, если диагонали ромба равны 30 см и 40 см.
4. Через конец радиуса шара проведена плоскость, составляющая с ним 30° . Найдите площадь сечения шара этой плоскостью, если радиус шара равен 6 см.

Практическая работа № 48. Уравнение сферы

1. Повторение теоретического материала. Уравнение сферы, центр, радиус сферы.
2. Решение задач.

Решите задачи:

1. Укажите центр и радиус сферы, заданной уравнением
а) $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z + 9)^2 = 25$; б) $(x - 3,6)^2 + (y + 0,75)^2 + (z + 777)^2 = 1,21$
2. Проверьте, лежит ли точка A на сфере
а) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$, если $A(-1; -1; 3)$ б) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z + 4)^2 = 16$, если $A(4; -3; -2)$
3. Напишите уравнение сферы радиуса R с центром в начале координат, если $R = 8$; $R = 2,5$
4. Напишите уравнение шара радиуса R с центром в начале координат, если $R = 6$
5. Напишите уравнение сферы радиуса R с центром в точке C , если $C(-3; 2; 4)$ и $R = 5$
6. Напишите уравнение шара радиуса R с центром в точке C , если $C(5; 4; -2)$ и $R = 0,5$
7. Составьте уравнение сферы с центром в точке C , проходящей через точку M , если
а) $C(0; -4; 9)$, $M(6; -1; 0)$; б) $C(-2; 4; 0)$, $M(-2; 4; 3)$
8. Докажите, что каждое из следующих уравнений задаёт сферу. Найдите координаты центра и радиус этих сфер
а) $x^2 - 9x + y^2 + 2y + z^2 = 34$; б) $x^2 + y^2 - 3z + z^2 + 5y - x - 18 = 0$
9. Найдите координаты точек пересечения сферы с координатными осями
 $(x + 3)^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 25$

Глава 14. Производная и ее геометрический смысл

Практическая работа № 49. Нахождение производных элементарных функций

План работы:

1. Повторить теоретические знания по теме Производная элементарных функций.
2. Ответить на теоретические вопросы.
3. Вычисление производных с помощью таблицы производных.

I вариант	II вариант
1. Контрольные вопросы	
а) дать определение производной; б) записать формулы дифференцирования; в) чему равна производная постоянной?	

2. Вычислить производную:	
1. $y = x^2 - 7x$; ; 3. $y = 7x^2 + 3x$; $y = 15x + \sqrt{x}$; 5. $y = 10x^2 + \frac{1}{x}$; $y = \sin x + 3$; 7. $y = -2x^2 - \frac{1}{x}$; $y = -2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$	2. $y = x^5 + 2x$; 1. $y = x^4 - 3x$; 3. $y = 4x^4 - 6x$; $y = 16x - 2\sqrt{x}$; 5. $y = 2x^3 - \frac{1}{x}$; 6. $y = 2 \cos x - 4x^2$; 7. $y = -4x^4 - \frac{3}{x}$; 8. $y = -3\sqrt{x} + \frac{1}{14}x^7$
3. Вычислить производную функции, используя правила дифференцирования:	
1. $y = \cos x \cdot \sin x$; ; 3. $y = \frac{4x^2 + 1}{2x - x^4}$	2. $y = \sqrt{x} \cdot e^x$; 1. $y = \operatorname{tg} x \cdot e^x$; $y = \sin x \cdot (x^3 + 2x)$; 3. $y = \frac{x^3 + 2x^6}{3x - x^5}$

Практическая работа № 50. Производная. Правила дифференцирования.
Производная сложной функции

План работы:

1. Повторить формулы дифференцирования.
2. Используя таблицу производных, правила дифференцирования суммы, произведения и частного элементарных функций, найти производные функций.
3. Используя формулу дифференцирования сложной функции найти производные.

Задания практической работы

1. Используя таблицу производных, правила дифференцирования суммы, произведения и частного элементарных функций, найти производные следующих функций:

1 вариант	2 вариант	3 вариант
$y = 12x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - 7$ 1	1 $y = 2e^x + 3x^3$	$f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{16}{3}x^3$
$y = 2x^3 - 5x^2 + 4$ 2	2 $y = 6x^2 + 2x^4 + 6$	$y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cos x$
$y = e^x(\sin x + \cos x)$ 3	3 $y = \sqrt[3]{x^2} \sin x \ln x$	3 $y = 4x^3 \sin x$
4 $y = (x^4 - 3)(x^2 + 2)$	4 $y = (x + 2)(x^2 + 2x^3 + 6)$	$y = (x^5 - x)e^x$ 4
5 $y = \frac{2}{(1-x^2)(1+x^4)}$	5 $y = \frac{1-x^3}{1-x^5}$	$y = \frac{5 \operatorname{arctg} x}{\arcsin x}$

2. Решить уравнение $y' = 0$.

$y^1 = 2x^2 - x$	$y = x^2 - 5x$ 1	$y = 2x - 5x^2$ 1
------------------	------------------	-------------------

$y = \frac{1}{3}x^3 - 1,5x^2 - 4x$ 2	$y = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12$ 2	$y = x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 5x$ 2
$y = 4x - 3x^2$ 3	$y = x^4 + 4x$ 3	$y = x^4 - 12x^2$ 3

3. Найти производную сложной функции.

$y = (2x - 3)^6$ 1	$y = (x^2 + 7x - 2)^3$ 1	$y = \left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^4$ 1
2 $y = \cos 3x$	2 $y = \operatorname{ctg} \frac{4-3x}{7}$	2 $y = \frac{\sin 3x}{2x+3}$
3 $y = x \cos 3x$	3 $y = x e^x$	$y^3 = x^2 \ln x$
4 $y = x \ln^2 x$	4 $y = e^{2x} \ln(5-3x)$	$y = \frac{(3x-2)^3}{1+x}$ 4
$y = \sin^3(2x + \frac{\pi}{6})$	$y = x(2x-3)^7$	$y = (8x+1)^2(2x-3)^7$

Практическая работа № 51. Геометрический смысл производной

План работы:

1. Повторить формулы дифференцирования.
2. Используя определение геометрического смысла производной находить угловой коэффициент касательной к функции.
3. Решение задач.

1 Вариант

1 уровень	1. Угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x$ в точке с абсциссой $x = 1$ равен:	а) -1 ; б) $-2\frac{2}{3}$; в) 1 ; г) $1/3$.
	2. Угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = 2 \cos 2x - \sin 4x$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{4}$ равен:	а) 8 ; б) 2 ; в) -2 ; г) 0 .
	3. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = x^2 - 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.	
	4. Дана функция $f(x) = 5 + 4x - 3x^2$. Найдите координаты точки её графика, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен -5 .	
	5. К функции $y = 2 \sin x + 3 \cos x$ проведены касательные в точках с абсциссами $x_1 = \frac{\pi}{2}$ и $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. Являются ли эти касательные параллельными прямыми?	
2 уровень	6. Найдите угол между касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 2x + 5$ в точке с абсциссой $x_0 = 0,5$ и осью абсцисс	
	7. Касательная к графику функции $f(x) = -2x^3 - 12x^2 - 23x - 8$ образует с положительным направлением оси абсцисс угол 45° . Найдите координаты точки касания	

рове нь	8. Касательная к графику функции $y = (x - 1)^2 x$ параллельна оси Ox , но не совпадает с ней. Найдите координаты точки касания.			
	а	б	в	г
	$\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{27}\right)$	$\left(\frac{1}{3}; -\frac{4}{27}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{27}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{2}{\sqrt{27}}\right)$

2 Вариант

1 уровень	1. Угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3$ в точке с абсциссой $x=-1$ равен:		а) 3; б) 4; в) 7; г) $\frac{3}{4}$.				
	2. Угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)=3\sin 3x-\cos 2x$ в точке с абсциссой $x=\frac{\pi}{6}$ равен:		а) $\sqrt{3}$; б) 10; в) $9+\sqrt{3}$; г) 6.				
	3. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $y=2x-x^2$ в точке с абсциссой $x_0=-2$.						
	4. Дана функция $f(x)=5x^2-12x+1$. Найдите координаты точки её графика, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен 3.						
	5. К функции $y=2\cos x+3\sin x$ проведены касательные в точках с абсциссами $x_1=\frac{\pi}{2}$ и $x_2=\frac{3\pi}{2}$. Являются ли эти касательные параллельными прямыми?						
2 уровень	6. Найдите угол между касательной к графику функции $f(x)=3x^2-2x+5$ в точке с абсциссой $x_0=0,5$ и осью абсцисс.						
	7. Найдите абсциссу точки графика функции $f(x)=14x^2-27x+15$, в которой касательная наклонена под углом 45° к оси абсцисс.						
рове нь	8. Выберите координаты точки, через которую проходит касательная, проведённая к графику функции $y=e^x(x^2-3x+1)$ в точке $x_0=0$.						
а		б		в		г	
(-1; 0)		(-1; 2)		(1; -1)		(2; 0)	

Глава 15. Применение производной к исследованию функции

Практическая работа № 52. Нахождение точек максимума и минимума

План работы:

1. Повторить знания о производной. Точки экстремума.
2. Повторить алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции.
3. Ответить на теоретические вопросы.
4. Решение задач.

I вариант	II вариант
1. Контрольные вопросы	
а) что такое критические точки функции? б) что такое экстремумы функции?	

2. Определить род экстремума функции	
$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2$	$f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5$
3. Решить задачу:	
1. Сумма двух целых чисел равна 24. Найти эти числа, если их произведение принимает наибольшее значение. 2. Площадь прямоугольника составляет 16 см^2. Каковы его размеры, если периметр принимает наименьшее значение.	1. Разность двух чисел равна 10. Найти эти числа, если известно, что их произведение принимает наименьшее значение. 2. Площадь прямоугольника составляет 64 см^2. Каковы должны быть его размеры, чтобы периметр прямоугольника был наименьшим?

Практическая работа № 53. Нахождение промежутков монотонности функции

План работы:

1. Проверить уровень усвоения учащимися предыдущих знаний по темам: дифференцирование функции.

2. Научиться применять производную для отыскания промежутков возрастания и убывания функции.

3. Закрепить умение находить наибольшее и наименьшее значение функции.

1 вариант

1. Найти промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции:

а) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2$;

б) $f(x) = 8x^3 + 7x^2 - 3$;

2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке:

а) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$, на $[0; 3]$;

б) $f(x) = \sin 2x - x$, на $[-\pi/2; \pi/2]$.

3. Число 63 представить в виде суммы трех слагаемых, два из которых пропорциональны числам 3 и 4, так, чтобы их произведение было наибольшим.

2 вариант

1. Найти промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции :

а) $f(x) = -x^3 + 3x$;

б) $f(x) = -4x^3 + 5x$;

2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке:

а) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, на $[-2; 2]$;

б) $f(x) = \cos 2x + 2x$, на $[-\pi; \pi]$.

3. Число 84 представить в виде суммы трех слагаемых, два из которых пропорциональны числам 2 и 5, так, чтобы их произведение было наибольшим.

Практическая работа № 54. Исследование и построение графиков функций с помощью производной

План работы:

1. Повторить теоретический материал.

2. Письменный ответ на вопросы.

3. Исследование функции с помощью производной и построение графика.

I вариант	II вариант
1. Контрольные вопросы	
а) что такое интервалы монотонности? б) что такое $\max$ и $\min$ для функции? в) вспомнить алгоритм исследования функции на экстремумы.	
2. Записать общую схему исследования функции для построения графиков:	

1. Найти область определения; 2. Определить свойства функции и точки пересечения с осями координат, если можно; 3. Исследовать на монотонность и составить схему; 4. Определить экстремумы и значение функции в них; 5. Найти дополнительно несколько точек; 6. Построить график функции.							
3. Используя данные о производной y' , приведенные в таблице, ответить на вопросы: а) промежутки возрастания; б) промежутки убывания; в) точки максимума; г) точки минимума.							
I вариант							
	(- $\infty; -5)$	5	(-5; -2)	2	(-2; 8)	(8; + $\infty)$	
,	+		-			+	
II вариант							
	(- $\infty; 2)$	2	(2; 3)	3	(3; + $\infty)$		
,	+	0	-	0	+		
4. Используя вышеизложенную схему, исследовать и построить график функции:							
1) $y = x^3 - 3x + 2$;				3) $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 8$;			
2) $y = x^4 - 2x^2 + 1$;				4) $y = -x^4 + 8x^2 - 7$.			

Глава
16.

Интеграл

Практическое занятие № 55. Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства.

План работы:

1. Повторить определение первообразной.
2. Повторить определение неопределенного интеграла.
3. Письменно ответить на вопросы.

Задание 1. Ответы на вопросы:

- 1) Что называется первообразной?
- 2) Что называется неопределённым интегралом?
- 3) Как обозначается, читается неопределённый интеграл?
- 4) Что такое интегрирование?
- 5) Сформулировать свойства неопределённого интеграла.
- 6) Продолжите формулы

$$\int x^a dx = \dots$$

$$\int dx = \dots$$

$$\int \frac{dx}{x} = \dots$$

$$\int \sin x dx = \dots$$

$$\int \cos x dx = \dots$$

$$\int a^x dx = \dots$$

Практическая работа № 56. Вычисление неопределенных интегралов, используя таблицу интегралов

План работы:

1. Составить таблицу основных формул и свойств неопределенных интегралов.
2. Заполнить пропуски в таблице.
3. Вычислить неопределенный интеграл.

Практическое задание:

Задание 1: Составить таблицу основных формул и свойств неопределенных интегралов.

Форма выполнения задания: таблица.

Задание 2. Используя рассмотренные свойства неопределенного интеграла. Заполните пропуски.

$\int \left(2x^5 + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x} \right) dx = \square * x^{\square} - \frac{\square}{x^{\square}} - 3 * \square + C$
$\int (e^{2x} - \cos 3x) dx = \square * e^{2x} - \square * \square + C$
$\int \left(2 \sin \frac{x}{5} - 5e^{2x+\frac{1}{3}} \right) dx = \square * \square - \square * e^{\square} + C$
$\int \left(\frac{2x^4 - 4x^3 + x}{3} \right) dx = \square * x^{\square} - \square * x^{\square} + \square * x^{\square} + C$
$\int ((x - 3x)(1 + 2x)) dx = \square * x^{\square} - x^{\square} + C$
$\int \sin x \cos x dx = \square * \square^{\square} + C$

Задание 3. Вычислить интеграл.

$\int_1 (x^3 + 2x^2 - 5) dx$	$\int_1 (4x^2 + x^5 + 3) dx$	$\int_1^1 (6x^5 - 2x^3 + x - 1) dx$
$\int \left(\frac{52}{3}x^4 - x^6 + 4x - 8 \right) dx$	$\int_2 (x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x^4) dx$	$\int_2^2 \left(\frac{16}{3}x^3 + 2x^2 + x \right) dx$
$\int \sqrt[3]{x^5} dx$	$\int_3^3 \sqrt{x^7} dx$	$\int_3^3 \sqrt{x^6} dx$
$\int_4^4 (\sqrt[3]{x^4} + x^6) dx$	$\int_4^4 (\sqrt[4]{x^5} + \frac{1}{2}x^3) dx$	$\int_4^4 (\sqrt[3]{x^4} - 5x^3) dx$

Практическая работа № 57. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница

План работы:

1. Повторить определение определенного интеграла.
2. Ответить на вопросы.
3. Вычислить определенный интеграл.

І вариант	ІІ вариант
1. Ответьте на вопросы	
а) что такое определенный интеграл?	
б) в чем заключается его геометрический смысл?	
в) записать формулу Ньютона-Лейбница.	
2. Вычислить определенный интеграл:	

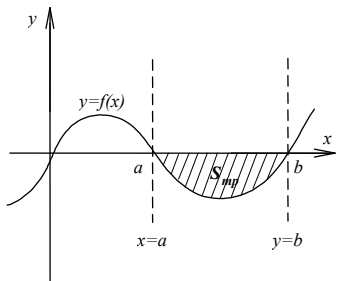
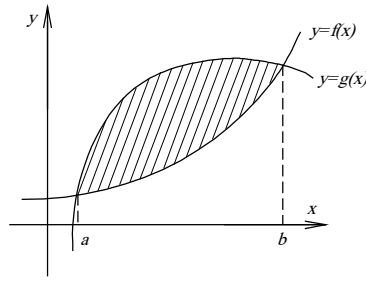
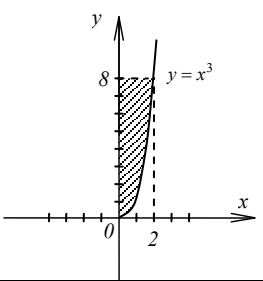
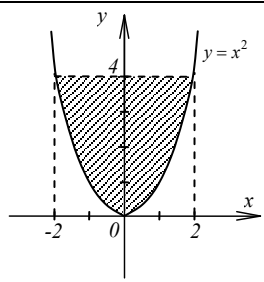
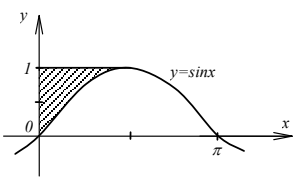
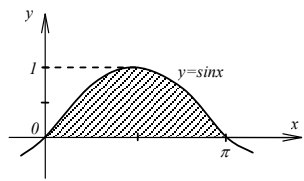
1) $\int_{-\frac{2}{3}}^1 x^3 dx$; 2) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2}$; 3) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx$; 4) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; 5) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$; 6) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{5}{\sin^2(x + \frac{\pi}{3})} dx$;	1) $\int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} x^4 dx$; 2) $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; 4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$; 5) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} 2 \sin \frac{x}{3} dx$; 6) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{7}{\cos^2 3x} dx$.
---	--

Практическая работа № 58. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление площади криволинейной трапеции

План работы:

1. Повторить теоретический материал. Определение криволинейной трапеции. Формула нахождения криволинейной трапеции.

Нахождение площади плоских фигур с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

I вариант	II вариант
1. Контрольные вопросы	
а) что такое криволинейная трапеция? б) записать формулы для вычисления криволинейных трапеций следующего вида:	
	
2 	
3 	3 
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:	

1) $y = x^2, y = 0, x = 4$; 2) $y = x^3 + 2, y = 0, x = 0, x = 2$; 3) $y = \sin x, y = 0, x = \frac{\pi}{2}$;	4) $y = x^2, y = 0, x = -3$; 5) $y = x^3, y = 0, x = -3, x = 1$; 6) $y = \cos x, y = 0, x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}$.
--	--

Глава 17. Объемы тел

Практическая работа № 59. Нахождение объёма прямоугольного параллелепипеда и его элементов

План работы:

1. Повторить формулу объема прямоугольного параллелепипеда.
2. Повторить элементы прямоугольного, свойства плоских фигур.
2. Выполнение чертежей и вычислений, заполнение таблицы.

Задания для практической работы:

1. В прямоугольном параллелепипеде с квадратным основанием p – сторона основания, c – высота. Заполнить таблицу.

	А	Б	В	Г	Д	Е
p	3		6	2	$\sqrt{2}$	
c	4	11			$\sqrt{15}$	1
V		1,76	122,4	12	$\sqrt{13}$	Q

2. Дан прямоугольный параллелепипед, основанием которого является квадрат.

	А	Б	В	Г	Д	Е
Сторона квадрата			3,5			
Диагональ квадрата	5			2	d	
Периметр квадрата	$\sqrt{2}$	4		$\sqrt{2}$		P
Высота паралл-да		$\sqrt{3}$			c	
Объём паралл-да	4	9,8				
			12,7	28,4		V
			4			

Практическая работа № 60. Вычисление объема пирамиды

План работы:

1. Повторить формулу объема пирамиды и ее элементы (основание, высота, апофема).
2. Выполнение чертежей, дополнительных построений, вычислений.
3. Решение задач.

1 Вариант

1. Пирамида, объем которой равен V , а в основании лежит прямоугольник, пересечена четырьмя плоскостями, каждая из которых проходит через вершину пирамиды и середины смежных сторон основания. Найдите объем оставшейся части пирамиды.

2. Основанием пирамиды является равносторонний треугольник со стороной, равной 1. Две ее боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а третья образует с основанием угол 60° . Найдите объем пирамиды.

3. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 3 см, а прилежащий к нему острый угол равен 30° . Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найдите объем пирамиды.

Дополнительное задание:

4. Центры граней куба, ребро которого равно $2a$, служат вершинами октаэдра. Найдите его объем.

2 Вариант

1. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее диагональным сечением является правильный треугольник со стороной, равной 1.

2. Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Высота пирамиды равна 3 см. Найдите объем пирамиды.

3. Боковые грани пирамиды, в основании которой лежит ромб, наклонены к плоскости основания под углом 30° . Диагонали ромба равны 10 см и 24 см. Найдите объем пирамиды.

Дополнительное задание:

4. В куб с ребром, равным a , вписан правильный тетраэдр таким образом, что его вершины совпадают с четырьмя вершинами куба. Найдите объем тетраэдра.

Практическая работа № 61. Вычисление объема конуса и цилиндра

План работы:

1. Повторение теоретического материала.
2. Письменные ответы на теоретические вопросы.
3. Выполнение чертежей и решение задач.

1 Вариант

1. Объем – это величина, ...
2. Кубическим сантиметром называется ...
3. Равные пространственные фигуры имеют ...
4. Формула объема прямого цилиндра имеет вид ...

Решите задачу:

1. Осевое сечение прямого кругового цилиндра - квадрат со стороной 3 см. Найдите объем цилиндра.

2. Диаметр основания конуса равен 12 см, а угол при вершине осевого сечения равен 90° . Найдите объем конуса.

3. Два конуса имеют общую высоту и параллельные основания. Найдите объем их общей части, если объем каждого конуса равен V .

2 Вариант

1. За единицу объема принимается ...
2. Кубическим метром называется ...
3. Объемом фигуры называется ...
4. Формула объема прямого кругового цилиндра имеет вид ..., где ...

Решите задачу:

1. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 2 см и наклонена к плоскости основания под углом 60° . Найдите объем цилиндра.

2. Осевым сечением конуса служит равнобедренный прямоугольный треугольник площади 9 см^2 . Найдите объем конуса.

3. В конус вписан другой конус таким образом, что центр основания вписанного конуса делит высоту данного конуса в отношении 3:2, считая от вершины конуса, а вершина вписанного конуса находится в центре основания данного конуса. Найдите отношение объемов данного и вписанного конусов.

Практическая работа № 62. Вычисление объема шара и его частей

План работы:

1. Повторить формулу вычисления объема шара.
2. Выполнить дополнительные построения к задачам.
3. Сделать вычисления.

1 Вариант

1. Найдите отношение объема шара к объему вписанного в него куба.
2. Найдите отношение объема шара к объему описанного около него октаэдра.
3. В шаре проведена плоскость, перпендикулярная диаметру и делящая его на части, равные 3 см и 9 см. Найдите объемы частей шара.
4. Радиус шарового сектора R , угол в осевом сечении 120° . Найдите объем шарового сектора.

2 Вариант

1. Найдите отношение объема шара к объему вписанного в него октаэдра.
2. Найдите отношение объема шара к объему описанного около него куба.
3. В шаре радиуса 13 см проведены по разные стороны от центра два равных параллельных сечения радиуса 5 см. Найдите объем полученного шарового слоя.
4. Найдите объем шарового сектора, если радиус окружности его основания равен 60 см, а радиус шара 75 см.

Глава 18. Статистика

Практическая работа № 63 . Вычисление среднего арифметического, математического ожидания и дисперсии случайной дискретной величины

План работы:

1. Повторить формулы для вычисления среднего арифметического, математического ожидания и дисперсии случайной дискретной величины.
2. Правило построения многоугольника распределения.
3. Решение задачи на вычисление среднего возраста.

Задания для практической работы:

1. Задан закон распределения случайной величины X (в первой строке таблицы указаны возможные значения величины X , а во второй строке указаны вероятности p этих возможных значений). Найти:

1. математическое ожидание,
2. дисперсию,
3. построить многоугольник распределения.

1 Вариант					2 Вариант			
x	23	25	28	29	x	17	21	25
p	0,3	0,2	0,4	0,1	p	0,2	0,4	0,3
3 Вариант					4 Вариант			
x	24	26	28	30	x	12	16	19
p	0,2	0,2	0,5	0,1	p	0,1	0,5	0,3

2. Рассчитать средний возраст студентов в группе из 20 человек:

№ п\п	Возраст (лет)	№ п\п	Возраст (лет)	№ п\п	Возраст (лет)	№ п\п	Возраст (лет)
1	18	6	20	11	22	16	21
2	18	7	19	12	19	17	19
3	19	8	19	13	19	18	19
4	20	9	19	14	20	19	19
5	19	10	20	15	20	20	19

Критерии оценки практических заданий

Отметка «5» ставится, если:

- работа выполнена полностью;
- в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;
- в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
- допущена одна существенная ошибка или два-три несущественных ошибки.

Отметка «3» ставится, если:

- допущены более одной существенной ошибки или более двух-трех несущественных ошибок, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме;
- при этом правильно выполнено не менее половины работы.

Отметка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Форма контроля:

85 – 100 % правильных ответов – отлично

70 – 84 % правильных ответов – хорошо

52 – 69% правильных ответов – удовлетворительно

0 – 51 % правильных ответов – неудовлетворительно

3.Форма контроля:

Учащимся предлагается оценить свою работу на занятии по 10 балльной системе, последовательно отвечая на вопросы:

1. Как я усвоил материал?
 - получил прочные знания (9 – 10 баллов);
 - усвоил (новый) материал частично (7 – 8 баллов);
 - мало понял, необходимо еще поработать (4 – 6 баллов).
2. Как я работал?
 - работал хорошо (9 – 10 баллов);
 - допустил ошибки (7 – 8 баллов);
 - не справился со многими заданиями (указать какими) (4 – 6 баллов).
3. Как работала учебная пара?
 - дружно все (9 – 10 баллов);
 - не все активны (7—8 баллов);
 - работа вялая, много ошибок (4 – 6 баллов)

Список литературы

Основные источники:

1. Алимов Ш.А. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровни). 10–11 классы. М.: Просвещение, 2024. 464 с.

2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа. Геометрия. Геометрия (базовый и углубленный уровни). 10–11 классы. М.: Просвещение, 2024. 256 с.
3. Башмаков М.И. Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования. М.: Академия, 2024. 256 с.
4. Башмаков М.И. Математика. Электронный учеб.-метод. комплекс для студ. учреждений сред. проф. образования. М.: Просвещение, 2024. 321 с.
5. Колмагоров А.Н. Алгебра и начала анализа, 10-11 классы. М.: Просвещение, 2024. 276 с.

Дополнительные источники:

1. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. В двух частях. Ч.1: Учеб. для общеобразовательных учреждений. – 4-е изд. – М.: Мнемозина, 2024
2. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. В двух частях. Ч.2: Задачник для общеобразовательных учреждений. – 4-е изд. – М. Мнемозина, 2024
3. Колмогоров А.Н., Алгебра и начала анализа. 10-11 кл. Учебное пособие для общеобразовательных учреждений. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2024

Интернет-ресурсы:

1. Сайт Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО) [Электронный ресурс] -<http://www.mccme.ru>
2. Сайт Allmath.ru — вся математика в одном месте [Электронный ресурс]
3. Графики функций [Электронный ресурс]- <http://www.graphfunk.narod.ru>
4. http://www.exponenta.ru/educat/links/1_educ.asp#0 – Полезные ссылки на сайты математической и образовательной направленности: Учебные материалы, тесты
5. <http://www.fxyz.ru/> – Интерактивный справочник формул и сведения по алгебре, тригонометрии, геометрии, физике.
6. <http://maths.yfa1.ru> – Справочник содержит материал по математике (арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия)